4. Číselné řady

Definice 1. Nechť je dána reálná posloupnost $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Potom nekonečnou (reálnou) číselnou řadou se členy a_n rozumíme symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \qquad (*)$$

resp. symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \left(\text{resp. } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n,\ \sum_n a_n \text{ apod.}\right)$$

Posloupností částečných součtů řady (*) se rozumí reálná posloupnost $\langle s_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, kde $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $\dots$, $s_n = a_1 + \dots + a_n$, $\dots$

Říkáme, že řada (*) má součet $s \in \mathbb{R}^*$ a píšeme

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = s, \quad \text{resp. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s,$$

jestliže $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Je-li $s \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že řada (*) konverguje. Jestliže $s = \pm\infty$ nebo limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, říkáme, že řada (*) diverguje. Jestliže $s_n \to \infty$ (resp. $s_n \to -\infty$), říkáme, že řada (*) diverguje k ∞ (resp. diverguje k $-\infty$). Pokud limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, pak říkáme, že řada (*) osciluje.

Příklady 2. a) Vyšetřujme tzv. geometrickou řadu:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1},$$

kde $0 \neq a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$ a kde q se nazývá kvocientem. Nejdříve odvoďme vzorec pro n-tý částečný součet

$$s_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}.$$

$$s_n = a + aq + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1} \quad / \cdot q$$
$$s_n \cdot q = \qquad aq + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n.$$

Pokud nyní odečteme od první rovnosti druhou rovnost, dostaneme:

$$s_n(1-q) = a - aq^n = a(1-q^n).$$

Odtud dostaneme snadno vzorec pro s_n:

$$s_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$ (zde ovšem předpokládáme, že $q \neq 1$.) Pak víme, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$ existuje, právě když je $|q| < 1$, a pak

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \lim_{n\to\infty} a\,\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Pro $q > 1$ a $a > 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\,\frac{1-q^n}{1-q} = \infty$ což znamená, že daná řada diverguje k ∞. Pro $q > 1$, $a < 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\,\frac{1-q^n}{1-q} = -\infty$ což znamená, že daná řada diverguje k $-\infty$. Je-li $q = 1$, pak

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot a = \begin{cases} \infty & \text{pro } a > 0 \dots \text{ řada div. k } \infty \\ -\infty & \text{pro } a < 0 \dots \text{ řada div. k } -\infty. \end{cases}$$

Je-li $q \leq 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\,\frac{1-q^n}{1-q}$ neexistuje, což znamená, že daná řada v tomto případě osciluje.

b) Vyšetřujme tzv. „teleskopickou řadu":

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$$

Snadno zjistíme, že $\forall k \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Pak

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= 1-\frac{1}{n+1}\ .$$ Pak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$. Tedy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1\ .$$

c) Vyšetřujme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Pak $\forall n\in\mathbb{N}$ je

$$s_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \longrightarrow \infty \text{ pro } n\to\infty.$$
Tedy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty \quad (\text{řada diverguje k } \infty.)$$

d) Vyšetřujme nyní tzv. <u>harmonickou</u> <u>řadu</u>:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Ukažme, že tato řada diverguje k ∞. $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} = \underbrace{\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n \text{ sčítanců}} \geq 2^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}. \quad (*)$$

Kdyby nyní posloupnost částečných součtů konvergovala, muselo by dle Bolzano-Cauchyovy věty platit, že

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} \to 0 \quad \text{pro } n\to\infty .$$
To je ale ve sporu s odhadem $(*)$. Tedy daná řada nemůže konvergovat. Dále je zřejmé, že
$$0 \leq s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_n < \ldots$$
a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

d) Uvažujme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\cdot n = 1-2+3-4+5-\ldots$

Zde máme: $s_1=1$, $s_2=-1$, $s_3=2$, $s_4=-2$, $s_5=3$, $s_6=-3$, $\ldots$ a tedy zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje $\implies$ řada osciluje.

<u>Definice 3.</u> Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ k součtu s, nazýváme <u>zbytkem po n-tém členu</u> číslo

$$r_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k .$$

<u>Příklad 4.</u> Uvažujme geometrickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$, $a \neq 0$. Je-li $|q| < 1$, pak je součet této řady roven číslu

$$s = \frac{a}{1-q},$$

a n-tý částečný součet je roven číslu:

$$s_n = a \, \frac{1-q^n}{1-q} .$$

Odtud plyne vztah pro zbytek r_n:

$$r_n = \frac{a}{1-q} - a \, \frac{1-q^n}{1-q} = a \, \frac{q^n}{1-q} .$$

<u>Věta 5.</u> Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pak $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

<u>Důkaz.</u> Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak pro částečné limity platí:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} s_{n-1} = s \in \mathbb{R} .$$

Odtud pak plyne: $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (s_n - s_{n-1}) =$

$$= \lim_{n \to \infty} s_n - \lim_{n \to \infty} s_{n-1} = 0 . \quad \square$$

<u>Poznámka 6.</u> Větu 5 nelze zřejmě obrátit. Stačí uvažovat řadu $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, která diverguje a zároveň platí:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

<u>Věta 7.</u> Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots ,$$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots$$

buď obě konvergují nebo obě divergují k ∞ resp. k $-\infty$ nebo obě oscilují. Mají-li součet $s \in \overline{\mathbb{R}}$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \dots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n .$$

<u>Důkaz.</u> $\forall n \in \mathbb{N}$ položme : $t_n := a_{k+1} + \dots + a_{k+n}$ (n-tý částečný součet řady $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$) a

$S_{n+k} = a_1 + \dots + a_k + t_n$ (kde s_m je m-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.)
Je zřejmé, že limita $\lim_{n\to\infty} S_{n+k}$ existuje právě když existuje limita $\lim_{n\to\infty} t_n$. Navíc pak platí

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+k} = \lim_{n\to\infty} S_n = a_1 + \dots + a_k + \lim_{n\to\infty} t_n =$$
$$= a_1 + \dots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n . \quad \square$$

<u>Důsledky 8.</u> a) Jsou-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dvě řady takové, že existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}, n > k$ je $a_n = b_n$, pak tyto řady buď obě konvergují nebo obě divergují k $+\infty$ resp. k $-\infty$ nebo obě oscilují.
b) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak zbytek r_n po n-tém členu je součtem řady $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ a píšeme tedy : $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

<u>Věta 9.</u> Nechť $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $s, t \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak
a) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = s \pm t$, má-li výraz $s \pm t$ smysl.

b) Je-li $c \in \mathbb{R}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \cdot s$, má-li součin smysl.

Důkaz. Domácí cvičení. $\square$

Věta 10. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$, $\langle k_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ je libovolná posloupnost přirozených čísel, která je rostoucí. Dále nechť $c_1 = a_1 + \ldots + a_{k_1}$, $c_2 = a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2}$, …, $c_n = a_{k_{n-1}+1} + \ldots + a_{k_n}$, …

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = s$.

Důkaz. Je-li $\langle s_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, pak je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je vybranou posloupností z posloupnosti $\langle s_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ a má tedy stejnou limitu s. $\square$

Poznámka 11. Předchozí věta ovšem neplatí v případě, kdy řada osciluje. Např. lze uvažovat řadu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Pak $(1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1) + \ldots = 0$. Ale

$1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots + (-1+1) + \ldots = 1$.

Řady s nezápornými členy

Uvažujme nyní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takové, že $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak zřejmě vždy existuje $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ takové, že

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Věta 12. Nechť $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, $\langle b_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jsou dvě (reálné) posloupnosti takové, že $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n$. Je-li $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pak $0 \leq s \leq t$.

Důkaz. Domácí cvičení. $\square$

Věta ~~16~~ 13. (Srovnávací kritérium).
Mějme dány dvě řady $\sum a_n$, $\sum b_n$. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $0 \leq a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.
Pak platí:
1) konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Podle věty 7 nemá na konvergenci ani divergenci řady vliv konečný počet jejích členů. Pak je snadno vidět, že tvrzení této věty jsou důsledkem předchozí věty 12. $\square$

Příklad 14. a) Vyšetřeme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

Řešení: Zřejmě $\forall n \in \mathbb{N}: \; 0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Jelikož díky Př. 2 (b) je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 < \infty$, tak z využitím vět 12 a 13, máme:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \leqq 1, \text{ tj. řada } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} \text{ konverguje}$$
a má součet $S \leqq 1$.

b) Vyšetřeme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Řešení: $\forall n \in \mathbb{N}: \; 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Z divergence harmonické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ pak plyne s využitím věty 13 (2) divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$. $\square$

Věta 15. (Podílové d'Alembertovo kritérium).
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

1) Ex-li číslo $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé

$n \geq n_0$ je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

2) Jestliže pro každé $n \geq n_0$ platí: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. 1) S ohledem na větu 7 lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že podmínka $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \in (0,1)$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Odtud pak dostaneme: $a_2 \leq a_1 q$, $a_3 \leq a_2 q \leq$ $\leq a_1 q^2$, ..., $a_n \leq a_1 q^{n-1}$, ..., což lze dokázat mat. indukcí. Nyní z toho, že geometrická řada $\sum a_1 q^{n-1}$ pro $q \in (0,1)$ konverguje, plyne v důsledku srovnávacího kritéria konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, pak pro každé $n \geq n_0$ je $a_n \geq a_{n_0} > 0$ a tedy neplatí že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. To znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $+\infty$. $\square$

Důsledek 16. (Limitní podílové kritérium).
Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy a nechť existuje limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$. Potom platí:
1) je-li $A < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
2) Je-li $A > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
3) Je-li $A = 1$, pak podle podílového kritéria nelze rozhodnout o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 17. (Odmocninné Cauchyovo kritérium).
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.
1) Ex-li číslo $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

~~2) Jestliže pro nekonečně mnoho indexů n platí~~

2) Jestliže pro každé $n \geq n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz.

1) Z uvedeného předpokladu plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $a_n \leq q^n$, kde $q \in (0,1)$. Pak opět ze srovnávacího kritéria a z konvergence geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Z předpokladu plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $a_n \geq 1$ a tudíž není splněna nutná podmínka konvergence (Věta 5). $\square$

Důsledek 18. (Limitní odmocninné kritérium).
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy a nechť existuje limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$. Potom platí:

1) Je-li $A < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
2) Je-li $A > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
3) Je-li $A = 1$, pak podle limitního odmocninného kritéria nelze rozhodnout o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka 19. Odmocninné kritérium je účinnější než podílové kritérium v tom smyslu, že lze-li rozhodnout o konvergenci podílovým kritériem, lze též rozhodnout o konvergenci odmocninným kritériem, opak však neplatí.

Příklady 20. a) Vyšetřeme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, kde $a > 0$ je parametr.

Řešení: Zřejmě $\forall n \in \mathbb{N}$ je $0 < \frac{a^n}{n!}$, a dále

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1}.$$

Odtud pak plyne: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Tedy podle limitního podílového kritéria daná řada konverguje pro libovolné $a > 0$.

b) Vyšetřujme konvergenci řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

<u>Řešení:</u> Zde $\forall n \in N$: $0 < \frac{n^n}{n!}$, a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} n!}{n^n . (n+1)!} =$

$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pak je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$. Dle limitního podílového ~~kt~~ kritéria daná řada diverguje.

c) Vyšetřujme konvergenci řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$.

<u>Řešení:</u> Zde je $a_n = \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$. Pak $\sqrt[n]{a_n} =$

$= \frac{1}{\ln(n+1)}$ pro každé $n \in N$, a tedy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$. Podle limitního

Cauchyova odmocninného kritéria pak daná řada konverguje.

d) Vyšetřujme konvergenci řady:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^4} + \ldots + \frac{1}{5^{2k-1}} + \frac{1}{7^{2k}} + \ldots$$

<u>Řešení:</u> Tedy $a_n = \frac{1}{5^n}$ pro n ~~sudé~~ liché a $a_n =$

$= \frac{1}{7^n}$ pro n sudé. Pro n liché máme: $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$= \frac{5^n}{7^{n+1}} = \frac{5^n}{7^n . 7} = \left(\frac{5}{7}\right)^n \cdot \frac{1}{7} < \frac{1}{7}$; dále pro n sudé máme : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7^n}{5^{n+1}} = \left(\frac{7}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{5} > 1$ pro $n \geq 6$. Tedy o konvergenci této řady nelze rozhodnout pomocí podílového kritéria.

Zkusme tedy použít odmocninné kritérium. Pro n sudé je $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{7}$ a pro n liché je $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{5}$. Takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{a_n} < 1$ a tedy daná řada konverguje podle odmocninného kritéria. □

<u>Věta 21.</u> (<u>Integrální kritérium</u>).
Nechť je dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy, dále nechť existuje nerostoucí nezáporná f-ce f definovaná na intervalu $\langle 1, \infty)$ taková, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ je $a_m = f(m)$. Potom daná řada konverguje, právě když existuje konečná limita:

$$\lim_{m \to \infty} \int_1^m f(x)\,dx = \int_1^{\infty} f(x)\,dx .$$

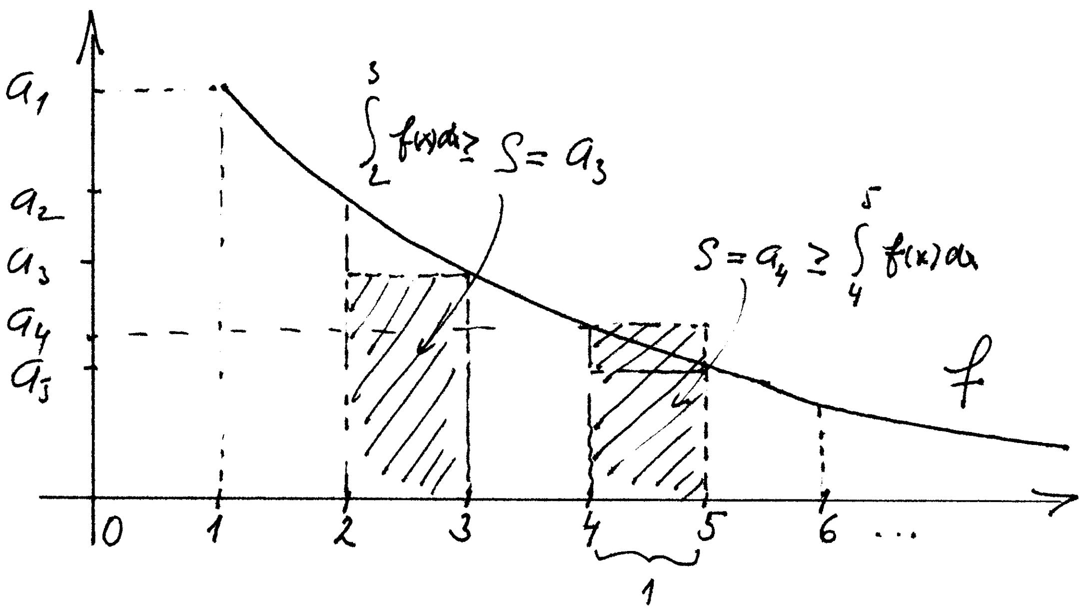
<u>Důkaz.</u> Z předpokladu, že funkce je nerostoucí funkcí vyplývá existence Riemannova integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ kdykoliv je $\langle a, b\rangle \subset \langle 1, \infty)$. Dále odtud plyne, že $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$f(x) \leq f(k) = a_k \quad , \quad \forall x \in \langle k, k+1\rangle .$$

Odtud pak dostáváme:

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \int_k^{k+1} a_k\,dx = a_k \quad \Longrightarrow \quad \int_1^m f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{m-1} a_k = s_{n-1} .$$



Tedy $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ máme:

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}. \qquad (*)$$

Dále z předpokladu, že funkce f je na $\langle 1, \infty)$ ~~nerostoucí~~ nezáporná vyplývá, že posloupnost integrálů $\int_1^n f(x)\,dx$ je neklesající a tudíž existuje (vlastní nebo nevlastní) limita:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx \in \langle 0, \infty) \cup \{\infty\}.$$

Konverguje-li nyní řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$, tj. existuje vlastní limita:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1},$$ pak z $(*)$ plyne konvergence posloupnosti $\int_1^n f(x)\,dx$.

Nechť dále pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ je $x \in \langle k-1, k\rangle$. Pak platí: $a_k = f(k) \leq f(x)$. Odtud plyne:

$$\sum_{k=2}^n a_k = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k a_k\,dx \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(x)\,dx =$$

$$= \int_1^n f(x)\,dx.$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2: \quad S_n \leq \int_1^n f(x)\,dx + a_1. \qquad (**)$$

Víme, že obě limity $\lim_{n\to\infty} S_n$ a $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx$ existují a jsou obě nezáporné.

Jestliže je navíc

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx < \infty, \text{ pak je díky } (**)$$

též $\lim_{n\to\infty} S_n < \infty$ což znamená, že řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje. $\square$

Příklad 22. Pomocí integrálního kritéria vyšetřeme konvergenci řady $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$, kde $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$ a odhadněme zbytek r_n této řady.

Řešení: Uvažujme funkci $f: \langle 1, \infty) \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem:

$$f(x) = \frac{1}{x^s}.$$

Tato funkce je pak kladná a klesající na $\langle 1, \infty)$ a $f(n) = 1/n^s$. Je-li $s > 0$, $s \neq 1$, pak je $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$F_n := \int_1^n \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{1-s}\left[x^{1-s}\right]_1^n = \frac{1}{1-s}\left(n^{1-s} - 1\right).$$

Pokud je $s \in (0,1)$, potom je $\lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-s}(n^{1-s} - 1) = \infty$ a tedy v tomto případě je daná řada divergentní. Pokud je $s \in (1, \infty)$, pak je $\lim_{n\to\infty} F_n = \frac{1}{1-s}$. Takže v tomto případě daná řada konverguje.

Je-li $s = 1$, pak je $F_n = \int_1^n \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^n = \ln n$.

Odtud $\lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$ a tedy řada

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ diverguje (jedná se o harmonickou řadu).

Nyní ještě odhadněme zbytek $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ pro $s > 1$.

Z důkazu integrálního kritéria plynou následující odhady $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$:

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq a_k \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx .$$

Odtud pak snadno plyne pro odhad zbytku r_n :

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq r_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx, \text{ tj.}$$

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx \leq r_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx \implies$$

$$\implies \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{(n+1)^{s-1}} \leq r_n \leq \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{n^{s-1}} . \qquad \square$$

Řady s libovolnými členy, absolutní a neabsolutní konvergence

V tomto odstavci budeme uvažovat řady $\sum a_n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dále použijeme toto označení:

$$\forall a \in \mathbb{R} : \quad a^+ := \max\{a, 0\}, \quad a^- := \max\{-a, 0\}.$$

Čísla a^+ resp. a^- pak nazveme kladnou resp. zápornou částí reálného čísla a.

Z definice kladné a záporné části snadno plyne, že $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Dále budeme zkoumat spolu s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ též řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| ,$$

které jsou ovšem řadami s nezápornými členy.

Položíme-li $s' := \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $s'' := \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, pak jsou tyto symboly korektně definovány a máme: $0 \le s' \le \infty$, $0 \le s'' \le \infty$. Má-li pak výraz $s' - s''$ smysl, potom platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = s' - s''. \qquad (*)$$

Taktéž platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-) = s' + s''. \qquad (**)$$

<u>Věta 23.</u> Řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergují právě tehdy, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

<u>Důkaz.</u> Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Pak, protože $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

$$0 \le a_n^+ \le |a_n|, \quad 0 \le a_n^- \le |a_n|,$$

plyne odtud s ohledem na srovnávací kritérium (V. 13) konvergence obou řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Naopak, konvergují-li řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, pak z toho, že $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| = a_n^+ + a_n^-$, plyne odtud s využitím věty 9:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n^+ + a_n^-\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

$$= s' + s'' < \infty.$$

Tj: řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. $\square$

<u>Věta 24.</u> Pokud konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

<u>Důkaz.</u> Z předchozí věty plyne, že $0 \le s' < \infty$, $0 \le s'' < \infty$

$\underline{\underline{(*)}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s' - s'' \in \mathbb{R}$. $\square$

Definice 25. Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pak se řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývá absolutně konvergentní řadou (podle V. 24 konverguje!). Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, avšak řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně konverguje (nebo také, že relativně konverguje).

Definice 26. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$, kde $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ nazýváme alternující řadou.

Věta 27 (Leibnizovo kritérium). Nechť $\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ je nerostoucí posloupnost, $\forall n \in \mathbb{N}: a_n > 0$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje, právě když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pro součet řady $s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ pak platí následující odhady: $a_1 - a_2 \leq s \leq a_1$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dále ať $\forall n \in \mathbb{N}$: $s_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n+1} a_n$. Pak uvažujme dvě vybrané posloupnosti $\langle s_{2n} \rangle_{n\in\mathbb{N}}$, $\langle s_{2n-1} \rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Jelikož $\forall n \in \mathbb{N}: a_{2n} \geq a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$, máme pro každé $n \in \mathbb{N}$:

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n},$$

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} \underbrace{- a_{2n} + a_{2n+1}}_{\leq 0} \leq s_{2n-1}.$$

Tedy platí: $s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq s_8 \leq \dots$

$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq s_7 \geq \dots$$

Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} \leq s_{2n-1}.$$

Tedy dokázali jsme, že vybraná posloupnost $\langle s_{2n}\rangle_{n\in N}$ je neklesající a je shora omezená neboť $\forall n \in N$:
$$s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq \dots \leq s_1. \qquad (*)$$
Existuje tedy limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s \in R$.

Odtud pak plyne existence limity: $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1} =$

$$= \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + a_{2n}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{0} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s.$$

Tedy i druhá vybraná posloupnost $\langle s_{2n-1}\rangle_{n\in N}$ konverguje k číslu s. Odtud již snadno vyplývá, že

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ (proč?).

Dále limitním přechodem v $(*)$ pro $n\to\infty$ dostáváme:
$$s \leq s_1 = a_1.$$
Neboť je posl. $\langle s_{2n}\rangle_{n\in N}$, máme:

$a_1 - a_2 = s_2 \leq s = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$. Tedy platí odhady

$$a_1 - a_2 \leq s \leq a_1.$$
Zbývá ještě dokázat opačnou implikaci. Ta je ale zřejmá. Pokud totiž neplatí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pak

neplatí: $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1} a_n = 0$, tj. není splněna nutná

podmínka konvergence (Věta 5). $\square$

<u>Příklad 28.</u> Uvažujme řadu:
$$1^\alpha - 2^\alpha + 3^\alpha - 4^\alpha + \dots,$$
kde $\alpha \in R$. Pro $\alpha \geq 0$ je pak $n^\alpha \geq 1$ a tedy v tomto případě není splněna nutná podmínka

konvergence (V. 5). Nechť nyní $\alpha < 0$. Pak $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n^{\alpha} > (n+1)^{\alpha} > 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \to \infty} n^{\alpha} = 0.$$

Tedy v důsledku Leibnizova kritéria daná řada konverguje kdykoliv je $\alpha < 0$. Speciálně pak konverguje tzv. Leibnizova řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots .$$

Pro její součet platí: $\frac{1}{2} \leqq s \leqq 1$. $\square$

Definice 29. Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, existuje-li bijekce $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$: $b_n = a_{\sigma(n)}$.

Víme, že součet konečného počtu sčítanců nezáleží na pořadí v jakém sčítáme. U součtu nekonečného počtu sčítanců ale není zřejmé, platí-li analogie komutativního zákona.
B. Riemann dokonce dokázal následující větu:

Věta 30 (Riemannova). Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně konverguje a nechť $s \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. Pak existuje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, která vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taková, že

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Důkaz. J. Veselý, Matematická analýza pro učitele, II. $\square$

Věta 31. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řadou a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vznikla jejím přerovnáním. Pak platí:
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Lemma 32. Nechť je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řadou s nezápornými členy a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vznikla jejím přerovnáním. Pak platí:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Důkaz. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ právě když naopak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, stačí pouze dokázat, že:
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$
Nechť $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce taková, že $\forall n \in \mathbb{N}$: $b_n = a_{\sigma(n)}$. Dále ať $k \in \mathbb{N}$ je zvoleno libovolně. Položíme-li $k_0 = \max\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$, pak máme:
$$\sum_{n=1}^{k} b_n = \sum_{n=1}^{k} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=1}^{k_0} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$
Jelikož $k \in \mathbb{N}$ bylo zvoleno libovolně, dostáváme odtud limitním přechodem pro $k \to \infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\square$

Důkaz věty 31. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vznikla jejím přerovnáním.

Pak díky lemmatu 32 také řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutně konverguje a platí: $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Dále podobně platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.
Pak odtud plyne:
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n^+ - b_n^-\} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n^+ - a_n^-\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

$\square$

Cauchyův součin řad:

Uvažujme dvě řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (z technických důvodů se zde sčítá od $n=0$.) Položme $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$, $\ldots$, $c_n = \sum_{k=0} a_k \cdot b_{n-k}$, $\ldots$

Způsob výpočtu členů c_n lze znázornit ve schématu:

$$
\begin{array}{cccc}
a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \ldots \\
a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \ldots \\
a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \ldots \\
\vdots & & &
\end{array}
$$

<u>Definice 33.</u> Řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, kde členy c_n jsou dány výše uvedenými vztahy nazýváme Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

<u>Věta 34</u> (<u>Mertens</u>). Konvergují-li obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a alespoň jedna z nich je absolutně konvergentní řadou, pak je Cauchyův součin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ těchto řad též konvergentní řadou a platí:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n .$$

Navíc, jsou-li obě řady absolutně konvergentní, potom i jejich Cauchyův součin je absolutně konvergentní řadou.

<u>Důkaz.</u> J. Veselý, Matematická analýza pro učitele II. $\square$

Příklady 35. a) Dokažme konvergenci řady:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots, \quad \text{kde } |a_n| < 10, \ \forall n = 0,1,2,\dots$$

Řešení: Použijeme Bolzano-Cauchyovo kritérium. To znamená, že potřeba ukázat, že $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$ platí:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ a $\forall p \in \mathbb{N}$ platí:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \dots + \frac{a_{n+p}}{10^{n+p}}\right| \leq \frac{|a_{n+1}|}{10^{n+1}} + \dots + \frac{|a_{n+p}|}{10^{n+p}} <$$

$$< \frac{10}{10^{n+1}} + \dots + \frac{10}{10^{n+p}} = \frac{1}{10^n} + \dots + \frac{1}{10^{n+p-1}} = \frac{10}{9}\left(\frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+p}}\right)$$

$$= \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{10^n}\left(1 - \frac{1}{10^{p}}\right) < \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{10^n} \to 0 \text{ pro } n \to \infty.$$

Zvolíme-li tedy $\varepsilon > 0$ libovolně, pak lze najít $N \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N$ je $\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{10^n} < \varepsilon$ a tedy

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ n > N.$$

b) Dokažme konvergenci řady:

$$\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots, \quad \text{kde } x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Nechť podobně jako v bodě a) nechť $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$. Pak

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = |s_{n+p} - s_n| = \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n} \to 0 \text{ pro } n \to \infty. \quad \square$$

c) Dokažme ~~konvergenci~~ divergenci řady:

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\dots$$

Řešení. Pro $m=0,1,2,\dots$ máme:

$$s_{3m+3}=\sum_{k=0}^{m}\Big(\frac{1}{3k+1}+\underbrace{\frac{1}{3k+2}-\frac{1}{3k+3}}_{>0}\Big).$$ Pak $s_{3m+3}>\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{3k+1}>$

$$>\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{3k+3}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k+1}\longrightarrow\infty \text{ pro } m\to\infty.$$

Tedy $\lim\limits_{m\to\infty}s_{3m+3}=\infty$. To znamená, že posloupnost částečných součtů s_n nekonverguje, tj. daná řada diverguje. Dokažme, že daná řada diverguje k ∞. Zvolme za tím účelem $K\in\mathbb{R}$ libovolně. Pak protože víme, že $\lim\limits_{m\to\infty}s_{3m+3}=\infty$, existuje $m_0\in\mathbb{N}$ takové, že $\forall m\in\mathbb{N},\ m\geq m_0:\ s_{3m+3}>K$. Položme pak $n_0=3m_0+3$. Je-li nyní $n\in\mathbb{N}$, $n>n_0$, pak je-li m největší přirozené číslo takové, že $3m+3\leq n$, pak $m\geq m_0$ a $s_n\geq s_{3m+3}>K$. Odtud již plyne, že $s_n\to\infty$ pro $n\to\infty$.

$\square$

d) Zkoumejme konvergenci řady: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

Řešení: 1) Ať $\forall n\in\mathbb{N}: a_n=\frac{1}{n(n+1)}$. Pak $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(-1)n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}.$$

Posloupnost $\langle a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ je zřejmě kladná a klesající. Navíc je $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Tedy v důsledku Leibnizova kritéria konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)}$ a tedy i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

2) Nyní ještě zkoumejme tzv. absolutní konvergenci řady:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n\cdot(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 < \infty .$$

Řada tedy absolutně konverguje. Poznamenejme ještě, že z absolutní konvergence podle věty 24 plyne i konvergence dané řady. $\square$

e) Uvažujme řadu: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\cdot\pi}{3}$ a vyšetřujme její konvergenci.

Řešení: Snadno se ukáže, že neplatí nutná podmínka konvergence, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin \frac{n\cdot\pi}{3} = 0$.

Stačí např. uvažovat vybranou posloupnost ~~(3n+1)π~~:
$$\sin \frac{(3n+1)\pi}{3} = \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \sin n\pi \cdot \cos \frac{\pi}{3} +$$
$$+ \cos n\pi \sin \frac{\pi}{3} = (-1)^n \sin \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \not\to 0 \text{ pro}$$
$n \to \infty$.

f) Uvažujme tzv. Leibnizovu řadu: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Z Taylorovy věty aplikované na funkci $y = \ln(1+x)$ pak plyne, že $\forall x \in (-1, 1\rangle$:
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Speciálně tedy pro $x = 1$ odtud dostáváme:
$$s = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \qquad (*)$$

Vynásobením řady (*) číslem $\frac{1}{2}$ obdržíme opět konvergentní řadu se součtem $\frac{s}{2}$:

$$\frac{s}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \dots \overset{\text{přidejme nuly}}{=}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \dots \qquad (**)$$

Nyní sečteme řady (*) a (**):

$$s + \frac{s}{2} = \frac{3}{2}s = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Poslední řada vznikne též přerovnáním výchozí řady (*) a má jiný součet než výchozí řada (*).

g) Dokažme divergenci řady:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots - \frac{1}{16} + \dots$$

<u>Řešení</u>: Uvažujme řady s kladnými a zápornými částmi členů výchozí řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + 0 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{8} + 0 + \dots + 0 + \frac{1}{16} + \dots$$

Vynecháním nul dostáváme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Nyní protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje (harmonická řada!)},$$

je $\sum_{n=1}^{\infty}{}' a_n^+ = \infty$. Odtud plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemůže konvergovat. Platí totiž $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n^+ = a_n + a_n^-$ a tedy pokud by řada $\sum_{n=1}^{\infty}{}' a_n$ konvergovala, znamenalo by to, že:

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \{a_n + a_n^-\} = \sum_{n=1}^{\infty}{}' a_n + \sum_{n=1}^{\infty}{}' a_n^- \in$$

$\in \mathbb{R}$ což je ve sporu s divergencí řady $\sum_{n=1}^{\infty}{}' a_n^+$. $\square$