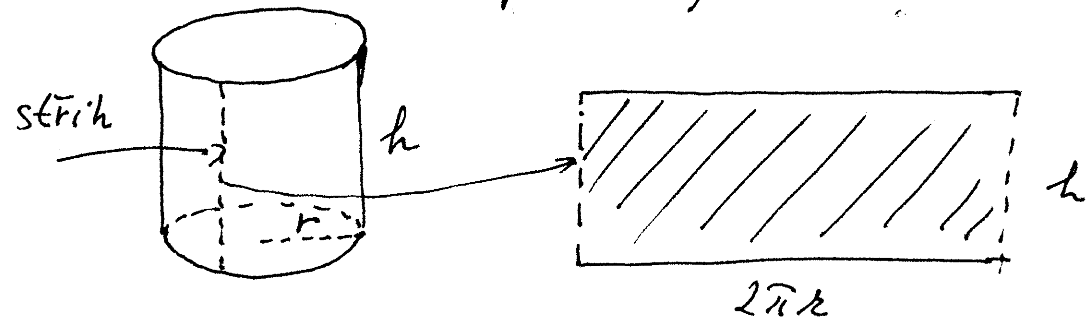
OBSAH ROTAČNÍ PLOCHY

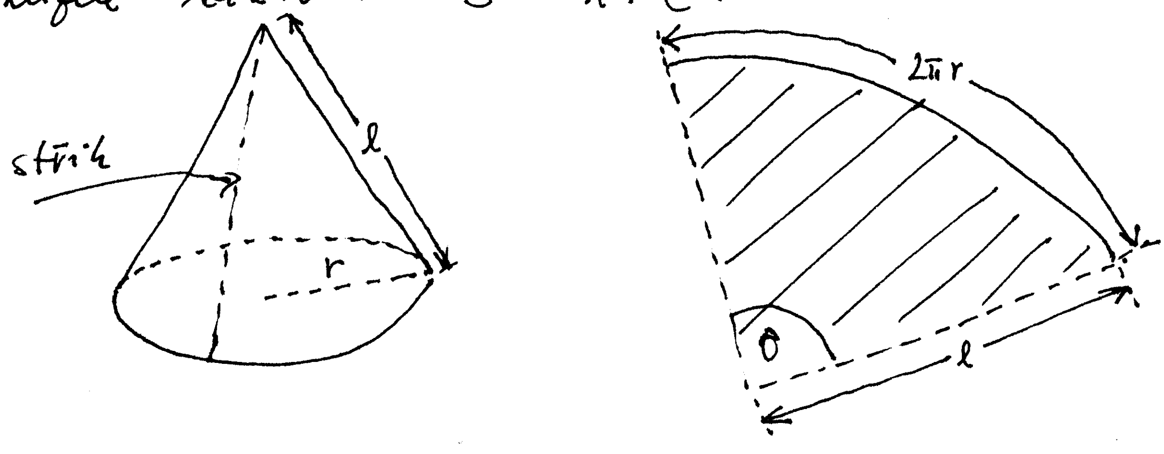
Začněme s jednoduššími rotačními plochami. Uvažujme plášť válce jehož podstava má poloměr r a jehož výška je h. Pokud potom rozvineme jeho plášť do roviny, obdržíme obdélník jehož délky stran jsou $2\pi r$ a h. Je tedy přirozené definovat obsah pláště jako číslo $S = 2\pi r h$.



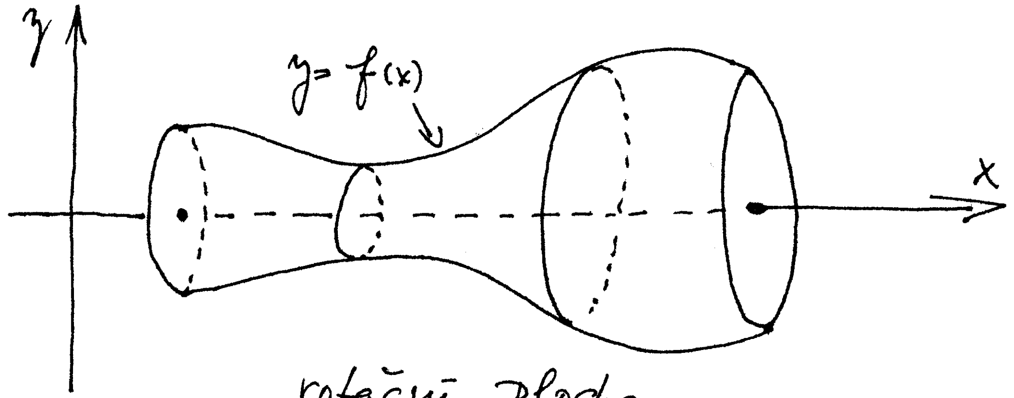
Podobně uvažujme kužel s kruhovou podstavou o poloměru r a s délkou hrany l. Pokud rozvineme plášť do roviny, obdržíme kruhovou výseč o poloměru l a středovým úhlem $\theta = 2\pi r / l$. Obecně víme, že obsah kruhové výseče o poloměru l a středovým úhlem θ je rovna číslu $(1/2) l^2 \theta$ a tedy v našem případě je obsah roven

$$S = \frac{1}{2} l^2 \theta = \frac{1}{2} l^2 \left(\frac{2\pi r}{l} \right) = \pi r l .$$

Tedy budeme definovat obsah plochy, která je pláštěm kužele takto: $S = \pi r l$.

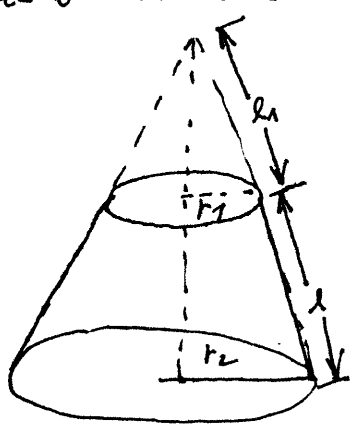


Dále budeme postupovat podobně jako při výpočtu délky grafu funkce $y = f(x)$, kde $x \in \langle a, b \rangle$, $f > 0$ na $\langle a, b \rangle$. Navíc předpokládejme, že $f \in C^1(\langle a, b \rangle)$.



rotační plocha

Graf funkce budeme aproximovat lomenou křivkou (polygonem). Bude-li tento polygon rotovat okolo osy, vznikne jednodušší plocha jejíž obsah bude přibližně roven přesnému obsahu rotační plochy. Přechodem k limitě dojdeme ke skutečnému obsahu rotační plochy. Aproximující plocha vzniklá rotací polygonu pak sestává z konečného počtu pásů, které lze považovat za plášť komolého kužele:



Určit obsah pláště komolého kužele jehož délka boční hrany je l, poloměr dolní podstavy r_2 a poloměr horní podstavy je r_1 lze určit s pomocí znalosti obsahu pláště dvou kuželů:

$$S = \pi r_2 (l_1 + l) - \pi r_1 l_1 = \pi [(r_2 - r_1) l_1 + r_2 l]. \quad (1)$$

Z podobnosti trojúhelníků máme:

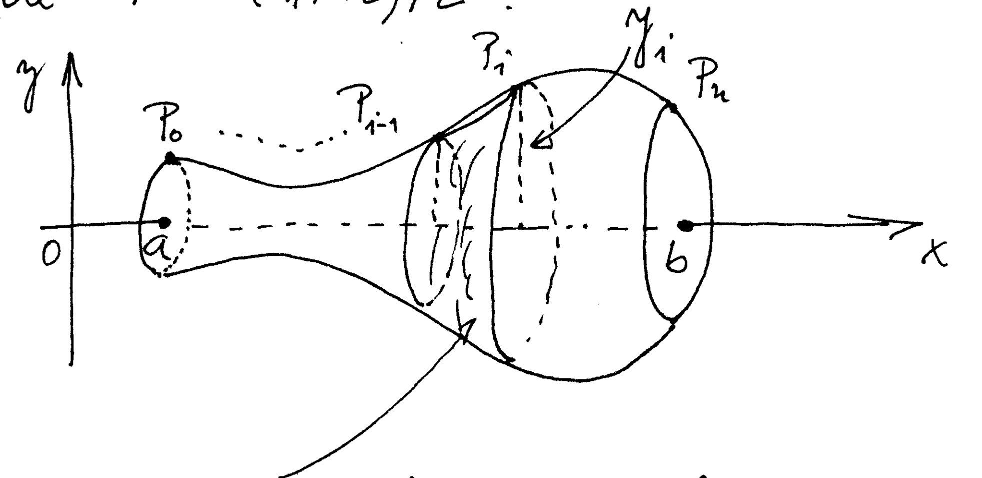
$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_1 + l}{r_2}.$$

Odtud: $r_2 l_1 = r_1 l_1 + r_1 l$ nebo $(r_2 - r_1) l_1 = r_1 l$.

Pokud pak dosadíme do vztahu (1), dostaneme:

$$\boxed{S = \pi (r_1 l + r_2 l) = 2\pi r l}, \qquad (2)$$

kde $r = (r_1 + r_2)/2$.



aproximující pás vzniklý rotací úsečky $P_{i-1}P_i$

Uvažujme dělení $(\mathcal{D})$ intervalu $\langle a, b \rangle$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$.
Dále nechť $P_i = (x_i, f(x_i)) = (x_i, y_i)$, $i = 0, \dots, n$,
$l = |P_{i-1} P_i|$, $r = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$. S využitím vzorečku (2) pak lze vypočítat obsah pásu vzniklého rotací úsečky $P_{i-1}P_i$ kolem osy x:

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} l = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1} P_i| .$$

Zde $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta y_i)^2 + (\Delta x_i)^2} = \sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}$

$$= \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2} =$$

$$= \sqrt{[f'(x_i^*)]^2 (x_i - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2} = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x_i ,$$

kde $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$.

Tedy $|P_{i-1} P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x_i$, $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$.

Je zřejmé ze spojitosti funkce f, že $y_{i-1} = f(x_{i-1}) \to f(x_i^*)$ a také, že $y_i = f(x_i) \to f(x_i^*)$ pokud $\nu(D) \to 0$, tj. $\Delta x_i \to 0$.

Odtud pak dostáváme:

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1+[f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x_i \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{y_{i-1}+y_i}{2} |P_{i-1}P_i| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} \sqrt{1+[f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x_i .$$

Výraz na pravé straně reprezentuje obsah plochy, která vznikla rotací polygonu $P_0 P_1 \dots P_n$ okolo osy x a aproximuje velikost obsahu plochy vzniklé rotací grafu funkce f okolo osy x. Obsah této plochy pak definujeme:

$$S \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} \sqrt{1+[f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x_i$$

$$= \lim_{\nu(D)\to 0} \left\{ \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1+[f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x_i + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{[f(x_{i-1})-f(x_i^*)]+[f(x_i)-f(x_i^*)]}{2} \sqrt{1+[f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x_i \right\}.$$

Vzhledem ke stejnoměrné spojitosti funkce f na $\langle a,b\rangle$ plyne, že $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že

$$\left| \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{[f(x_{i-1})-f(x_i^*)]+[f(x_i)-f(x_i^*)]}{2} \sqrt{1+[f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x_i \right|$$

$$\leq 2\pi \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \sqrt{1+[f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x_i \leq$$

$$\leq 2\pi\varepsilon \sup_{x\in\langle a,b\rangle} \sqrt{1+[f'(x)]^2} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 2\pi\varepsilon \sup_{x\in\langle a,b\rangle} \sqrt{1+[f'(x)]^2} \cdot (b-a).$$

Odtud pak plyne :

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{[f(x_{i-1})-f(x_i^*)]+[f(x_i)-f(x_i^*)]}{2} \sqrt{1+[f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x_i =$$

$$= 0 .$$

Dále ze spojitosti f' na $\langle a,b\rangle$ plyne, že funkce $g(x) =$ $= 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ má na $\langle a,b\rangle$ R-integrál a tedy :

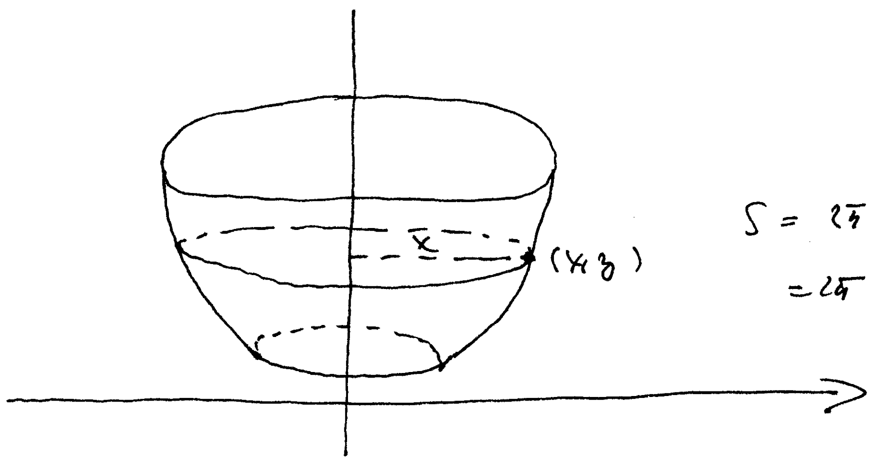
$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*)\sqrt{1+[f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx .$$

Tedy

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx .}$$

Jestliže křivka $x = g(y)$, $y \in \langle c,d\rangle$ rotuje kolem osy y, pak máme vzorec v této podobě (viz. obr.) :

$$\boxed{S = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\, dy .}$$



$$S = 2\pi \int x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy =$$

$$= 2\pi \int x\, ds \text{ , kde}$$

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$