Posloupnosti a řady funkcí

Úvod

Dříve již bylo dokázáno, že je-li funkce

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

definována na intervalu $I = \langle a, b \rangle$, pak

1) jsou-li funkce $f_1, f_2, \dots, f_n$ spojité na I, pak je i funkce f spojitá na I.

2) Jsou-li funkce $f_1, f_2, \dots, f_n$ diferencovatelné na I, pak je na I diferencovatelná i funkce f a navíc

$$f' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'.$$

3) Jsou-li funkce $f_1, f_2, \dots, f_n$ integrovatelné na I, pak je funkce f na I integrovatelná a platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \dots + \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Nyní se nabízí otázka, zdali analogická tvrzení platí i v tom případě, kdy je funkce f součtem nekonečné řady funkcí, tj.

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Pokud by například pro nekonečné součty platila tvrzení analogická tvrzením 1), 2) a 3), pak by byly následující výpočty korektní:

Příklad 1. Podle vzorce pro součet geometrické řady je

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots \qquad (*)$$

kde $x \in (-1,1)$.

Pokud budeme derivovat na levé straně a na pravé straně člen po členu, dostaneme:

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \dots$$

Při postupném derivování dostaneme vyjádření funkce $(1+x)^{-n}$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Pokud budeme naopak na obou stranách rovnosti $(*)$ integrovat, obdržíme:

$$\int_0^t \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+t) = \int_0^t dx - \int_0^t x\,dx + \int_0^t x^2\,dx - \int_0^t x^3\,dx + \int_0^t x^4\,dx - \int_0^t x^5\,dx + \dots =$$

$$= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 - \dots$$

Pokud v poslední rovnosti přejdeme k limitě pro $t \to 1$, máme součet alternující harmonické řady:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \qquad \square$$

Bodové limity

Mějme dánu posloupnost $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ funkcí definovaných na množině D.

<u>Definice 2.</u> Ex-li $\forall x \in D$ vlastní limita $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, řekneme, že posloupnost funkcí $\langle f_n \rangle_{n\in N}$ <u>konverguje</u> <u>bodově</u> <u>na</u> <u>množině</u> <u>D</u>. Tato limita definuje na D funkci f předpisem:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) .$$

Píšeme $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ nebo $f_n \to f$.

<u>Definice 3.</u> $\forall x \in D$ ~~položme~~ a $\forall n \in N$ položme

$$S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) .$$

Ex-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$, pak říkáme, že funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje v bodě x a píšeme:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n(x) .$$

Jestliže funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje $\forall x \in D$, říkáme, že tato řada konverguje bodově na D k funkci f definované předpisem:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) .$$

<u>Příklad 4</u> (<u>nespojitá</u> <u>limita</u> <u>posloupnosti</u> <u>spojitých</u> <u>funkcí</u>)

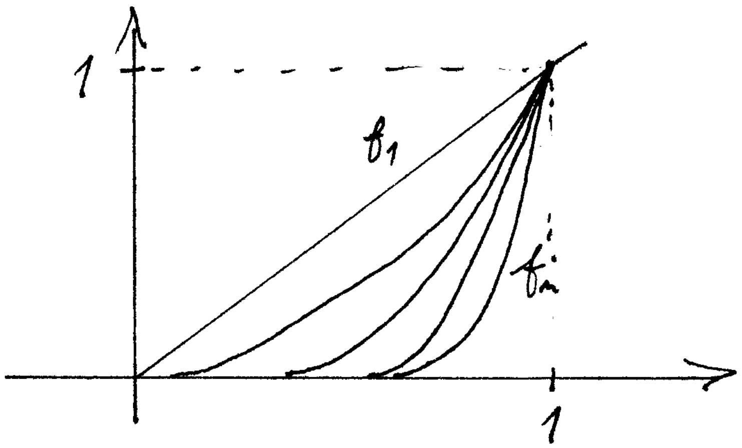
Pro každé $n \in N$ a pro každé $x \in \langle 0,1 \rangle$ položme $f_n(x) = x^n$. Zřejmě každá z funkcí f_n je spojitá na intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Dále platí:

$$\forall x \in \langle 0,1) : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \text{ a } \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1.$$

Tedy bodovou limitou je zřejmě funkce:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pro } x = 1 . \end{cases}$$

Funkce f je tedy zřejmě nespojitou funkcí v bodě $x = 1$.



Příklad 5. (derivace bodové limity není limitou derivací funkční posloupnosti)
Nechť $\forall n \in N$, $\forall x \in \langle 0,1 \rangle$ je $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$. Pak zřejmě $\forall x \in \langle 0,1\rangle$ je $f_n(x) \to 0$ pro $n \to \infty$. Dále $\forall n \in N$ a $\forall x \in \langle 0,1 \rangle$ je $f_n'(x) = x^{n-1}$. Podle předchozího příkladu je

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(x) = \lim_{n \to \infty} x^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pro } x = 1 . \end{cases}$$

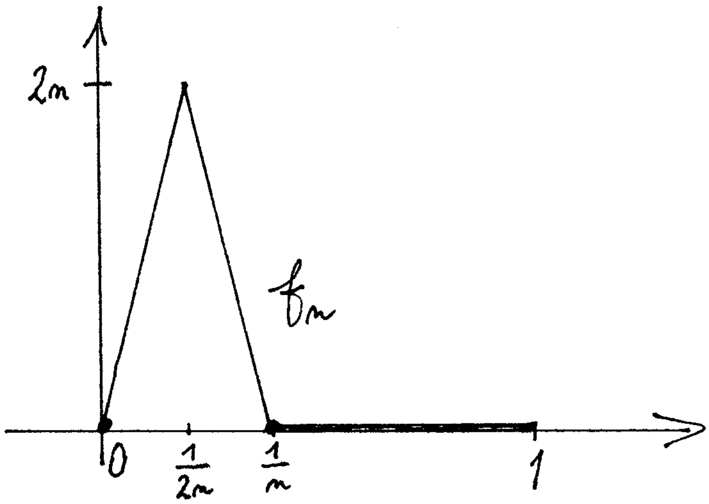
Na druhé straně je bodová limita $f \equiv 0$ na $\langle 0,1 \rangle$ a tedy:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d}{dx}\left(f_n(x)\right) \neq \frac{d}{dx}\left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right).$$

□

Příklad 6. (Integrál bodové limity není limitou integrálů funkční posloupnosti)
Pro každé $n \in N$ definujeme funkci f_n na $\langle 0,1 \rangle$ takto: $f_n(0) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = 2n$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, f_n je lineární na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2n} \rangle$ a na

intervalu $\langle \frac{1}{2n}, \frac{1}{n} \rangle$, a $f_n = 0$ na $\langle \frac{1}{n}, 1 \rangle$:



Je snadno vidět, že $\forall x \in \langle 0, 1 \rangle$: $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$. Tedy bodovou limitou posloupnosti funkcí f_n je funkce $f \equiv 0$ na $\langle 0, 1 \rangle$. Je zřejmé, že $\forall n \in N$:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 .$$

Ale $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$

Tedy $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,dx .$ $\square$

Stejnoměrná konvergence

Definice 7. Nechť $\langle f_n \rangle_{n \in N}$ je posloupnost funkcí, které jsou všechny definovány na množině D. Řekneme, že posloupnost $\langle f_n \rangle_{n \in N}$ konverguje stejnoměrně (uniformně) k funkci f na množině D, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \;\exists N \in N$ tak, že

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon , \text{ pro všechna } n \geq N \text{ a } x \in D.$$

Tuto skutečnost budeme zapisovat buď
$f_n \to f$ [unif] na D, nebo $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ [unif] na D, nebo $f_n \rightrightarrows f$ na D.

Příklad 8. Nechť $f_n(x) = x^n$, $D = \langle 0, \eta \rangle$, kde $0 < \eta < 1$.

V příkladu 4 jsme mohli vidět, že posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n$ nekonvergovala stejnoměrně na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ ke své bodové limitě $f = 0$. Příčina tkvěla v tom, že konvergence posloupnosti $f_n(x)$ na okolí bodu 1 je „pomalá". Ukážeme, že pro libovolné pevné $\eta \in (0,1)$ je konvergence na intervalu $\langle 0, \eta \rangle$ stejnoměrná. Konkrétně se dokáže, že $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon, \text{ kdykoliv } n \geq N, \ x \in \langle 0, \eta \rangle.$$

Stačí si uvědomit, že pro $0 \leq x_0 \leq \eta$ platí:

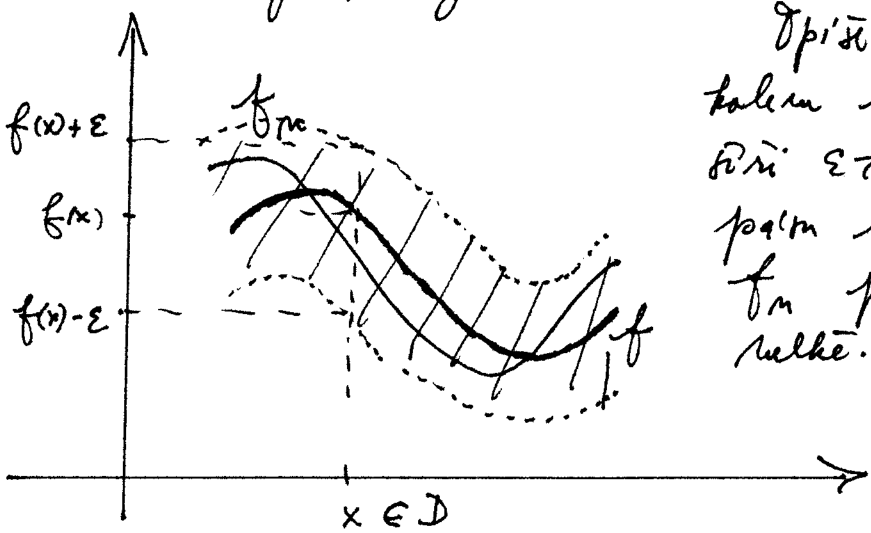
$$0 \leq (x_0)^n \leq \eta^n.$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Jelikož $\lim\limits_{n \to \infty} \eta^n = 0$, existuje $N \in \mathbb{N}$, tak, že $0 < \eta^n < \varepsilon$. Tedy je-li $n \geq N$, pak

$$0 \leq (x_0)^n \leq \eta^n < \varepsilon.$$

Tedy $\forall x \in \langle 0, \eta \rangle, \ \forall n \geq N: \ |f_n(x) - 0| = x^n < \varepsilon.$ $\square$

Poznámka 9. Princip stejnoměrné konvergence lze ilustrovat graficky:



Opíšeme-li pás kolem limity f o šíři $\varepsilon > 0$, musí v tomto pásu ležet grafy funkcí f_n pro n dostatečně velké.

Definice 10. Nechť $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost funkcí definovaných na množině D. Řekneme, že tato posloupnost je (stejnoměrně) Cauchyovská na D, jestliže $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ tak, že je-li $n\ge N$, $m\ge N$, pak $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ pro všechna $x\in D$.

Věta 11 (Cauchyovo kritérium).
Nechť $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost funkcí definovaných na množině D. Pak existuje funkce f definovaná na množině D taková, že $f_n \rightrightarrows f$ na D, právě když je posloupnost $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ na D stejnoměrně Cauchyovská.
Důkaz. Ponecháme jako DÚ. □

Příklad 12. V příkladu 8 jsme dokázali stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $f_n(x)=x^n$ na $\langle 0,\eta\rangle$, kde $0<\eta<1$. Dokažme ještě jednou stejnoměrnou konvergenci pomocí Cauchyova kritéria.

Je-li $m,n\in\mathbb{N}$, $n\ge m$, pak máme:
$\forall x\in\langle 0,\eta\rangle: \quad |x^n-x^m| = |x^m|\,|x^{n-m}-1| \le |x^m| = x^m \le \eta^m.$
Tedy
$$\sup_{x\in\langle 0,\eta\rangle}|x^n-x^m|\le\eta^m. \qquad (*)$$

Nechť $\varepsilon>0$ a nechť $N\in\mathbb{N}$ je takové, že $\eta^N<\varepsilon$ nebo ekvivalentně, že $N>\ln\varepsilon/\ln\eta$. Potom z $(*)$ plyne, že
$$|x^n-x^m|\le\eta^m<\varepsilon,$$
kdykoliv $n\ge m\ge N$, $x\in\langle 0,\eta\rangle$. Podle Cauchyova kritéria (Věta 11) pak odtud plyne stejnoměrná konvergence posl. $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ na intervalu $\langle 0,\eta\rangle$ je-li $0<\eta<1$. Výhodou tohoto postupu je to, že nemusíme znát limitu posloupnosti $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$. □

Věta 13. (Cauchyovo kritérium pro řady).
Nechť $\langle f_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ je posloupnost funkcí definovaných na množině D. Potom funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ stejnoměrně konverguje k funkci f na množině D, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\left| \sum_{j=m}^{n} f_j(x) \right| < \varepsilon \,,$$

pro každé $n \geq m \geq N$ a každé $x \in D$.

Důkaz. Věta je bezprostředním důsledkem Cauchyova kritéria pro funkční posloupnosti (V. 11) aplikovaného na posloupnost částečných součtů $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. $\square$

Příklad 14. Ukažme, že funkční řada

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle 0, \eta \rangle$ pro $0 < \eta < 1$. Můžeme pochopitelně, tak, že známe součet této geometrické řady: $(1-x)^{-1}$ pro $x \in \langle 0, \eta \rangle$ a pak dokazovat stejnoměrnou konvergenci přímo z definice. Místo toho ale využijeme k důkazu Cauchyovo kritérium.

Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ jsou pevné. Pak

$$\sup_{x \in \langle 0, \eta \rangle} \left| \sum_{j=m}^{n} x^j \right| = \sup_{x \in \langle 0, \eta \rangle} \left| \frac{x^m - x^{n+1}}{1-x} \right| = \qquad (*)$$

$$= \sup_{x \in \langle 0, \eta \rangle} \left| \frac{x^m}{1-x} \right| \left| 1 - x^{n-m+1} \right| \leqq \sup_{x \in \langle 0, \eta \rangle} \left| \frac{x^m}{1-x} \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{\eta^m}{1-\eta} .$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Jelikož $\eta^m (1-\eta)^{-1} \to 0$ pro $m \to \infty$, lze nalézt $N \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\eta^N (1-\eta)^{-1} < \varepsilon .$$

Odtud a z odhadu (*) pak dostáváme pro $n \geq m \geq N$, $x \in \langle 0, \eta \rangle$:

$$\left| \sum_{j=m}^{n} x^j \right| \leqq \frac{\eta^m}{1-\eta} < \varepsilon .$$

Podle Cauchyova kritéria pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ stejnoměrně konverguje na intervalu $\langle 0, \eta \rangle$, $0 < \eta < 1$. □

Věta 15 (Weierstrassův M-test).
Nechť $\langle f_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ je posloupnost funkcí definovaných na množině D a nechť $\langle M_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ je posloupnost kladných čísel. Je-li $\sum_k M_k < \infty$ a je-li pro každé $x \in D$ a $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$|f_k(x)| \leq M_k ,$$

pak funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně na množině D.

Důkaz. Položme $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in D$.

Abychom dokázali stejnoměrnou konvergenci, dokážeme, že posloupnost $\langle S_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ je na D stejnoměrně Cauchyovská. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$ libovolně. Pro $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ máme:

$$S_n(x) - S_m(x) = f_{m+1}(x) + \ldots + f_n(x)$$

a tedy

$$|S_n(x) - S_m(x)| \leqq M_{m+1} + \ldots + M_n .$$

Jelikož číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ konverguje, existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > m \geq N$ platí:

$$M_{m+1} + \ldots + M_n < \varepsilon .$$

Odtud

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon ,$$

kdykoliv je $n > m \geq N$, $x \in D$. Tedy posloupnost $\langle S_n \rangle$ je stejnoměrně konvergentní na D a tudíž i funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ je na D stejnoměrně konvergentní. □

Příklad 16. Uvažujme funkční řadu $\sum_{k=0}^{\infty} x^k =$
$= 1 + x + x^2 + \ldots$, kde $x \in \langle -a, a\rangle$, $0 < a < 1$.
Pak zřejmě $|x^k| \leqq a^k$ pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots$ a $x \in \langle -a, a\rangle$. Jelikož číselná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ konverguje, díky Weierstrassovu M-testu (Věta 15) řada $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ na intervalu $\langle -a, a\rangle$ konverguje stejnoměrně.

Věta 17 (Stejnoměrná konvergence a spojitost).
Nechť $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a nechť $x_0 \in I$. Jestliže posloupnost $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ stejnoměrně konverguje k funkci f na intervalu I a jestliže je každá z funkcí f_n spojitá v bodě x_0, pak je v bodě x_0 spojitá i funkce f. Speciálně, je-li každá funkce f spojitou funkcí na I, pak je na I spojitá i funkce f.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Musíme dokázat existenci $\delta > 0$ tak, že
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
pro $x \in I$, $|x - x_0| < \delta$. Pro každé $x \in I$ máme:
$$f(x) - f(x_0) = (f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0)).$$
Tudíž:
$$|f(x) - f(x_0)| \leqq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \quad (*)$$

Protože $f_n \rightrightarrows f$ na I, existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \quad (**)$$
pro všechna $x \in I$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$.
Nyní z $(*)$ a $(**)$ vyplývá, že $\forall x \in I$ je
$$|f(x) - f(x_0)| < |f_N(x) - f_N(x_0)| + \tfrac{2}{3}\varepsilon.$$
Nyní využijeme spojitosti funkce f_N v bodě x_0.

Vybereme $\delta > 0$ tak, aby $\forall x \in I$:
$$|x - x_0| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (***)$$
Kombinací $(**)$ a $(***)$ dostáváme:
$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$
kdykoliv $x \in I$ a $|x - x_0| < \delta$ jak jsme chtěli ukázat. $\square$

<u>Důsledek 18.</u> Nechť funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ stejnoměrně konverguje k funkci f na intervalu I. Pak jestliže je každá funkce f_k spojitá v bodě $x_0 \in I$, potom je i funkce f spojitá v bodě x_0. Speciálně je-li každá funkce f_k spojitá na I, pak je na I spojitá i funkce f.

<u>Důkaz.</u> Stačí aplikovat větu 17 na posloupnost $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ částečných součtů řady. $\square$

<u>Věta 19.</u> Nechť $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost funkcí spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$. Jestliže posloupnost $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ stejnoměrně konverguje k funkci f na $\langle a, b\rangle$, pak
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \qquad (*)$$

<u>Důkaz.</u> Podle věty 17 je funkce f spojitou funkcí na $\langle a, b\rangle$ a tudíž integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje. Musíme tedy ještě dokázat, že platí $(*)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nyní budeme chtít nalézt takové $N \in \mathbb{N}$, že
$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{pro všechna}$$
$n \geq N$. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right|$$
$$\leqq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqq \int_a^b \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f_n(x) - f(x)|\,dx$$
$$\leqq (b-a)\left(\max_{x\in\langle a,b\rangle} |f_n(x) - f(x)|\right).$$

Nyní protože $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b\rangle$, existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že:

$$\max_{x\in\langle a,b\rangle} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \text{ pro všechna}$$

$n \geq N$. Tedy pro všechna $n \geq N$ máme:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq (b-a)\,\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

jak jsme chtěli ukázat. $\square$

Pokud budeme předchozí větu aplikovat na posloupnost S_n částečných součtů funkční řady, dostaneme následující důsledek.

<u>Důsledek 20.</u> Nechť $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ je funkční řada taková, že $\forall k \in \mathbb{N}$ je funkce f_k spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a taková, že stejnoměrně konverguje k funkci f na $\langle a,b\rangle$. Pak je funkce f na $\langle a,b\rangle$ spojitou funkcí a platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

<u>Příklad 21.</u> Uvažujme geometrickou řadu

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k,$$

která jak víme bodově konverguje na intervalu $(-1,1)$.

Nechť nyní $0 < x < 1$. Podle příkladu 16 víme, že daná řada stejnoměrně konverguje na intervalu $\langle 0, x\rangle$. Navíc každý člen této řady je na $\langle 0, x\rangle$ spojitou funkcí. Můžeme tedy aplikovat důsledek 20 a integrovat člen po členu funkční řadu:

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Předchozí větu 19 lze ještě zesílit. Platí totiž následující věta kterou uvedeme bez důkazu.

<u>Věta 22.</u> Nechť $\langle f_n\rangle_{n\in N}$ je posloupnost funkcí integrovatelných na intervalu $\langle a, b\rangle$. Jestliže $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a, b\rangle$, pak je funkce f integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

<u>Důsledek 23.</u> Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ je funkční řada taková, že $\forall k \in N$ je funkce f_k integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a taková, že stejnoměrně konverguje k funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom je funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ integrovatelná a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

Nakonec zkoumejme, jestli platí analogická tvrzení i pro tzv. nevlastní integrál. Tj. platí-li

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{\infty} f_n(t)\,dt = \int_a^{\infty} f(t)\,dt \quad , \text{jestliže}$$

$f_n \to f$, nebo platí-li

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^{\infty} g_k(t)\,dt = \int_a^{\infty} f(t)\,dt,$$

pokud $f = \sum_{k=0}^{\infty} g_k$.

Jak však ukazuje následující příklad, nestačí pouze předpokládat stejnoměrnou konvergenci jako v případě konečných mezí integrálu. Důvod tkví v tom, že definice nevlastního Riemannova integrálu v sobě obsahuje ještě jeden limitní přechod navíc.

<u>Příklad 24.</u> Nechť $\forall n \in \mathbb{N}$ je

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } x \in \langle 0, n \rangle \\ 0 & \text{pro } x \in (n, \infty). \end{cases}$$

Pak $f_n \rightrightarrows 0$ na $\langle 0, \infty)$. Nicméně

$$1 = \int_0^{\infty} f_n(t)\,dt \not\to 0 = \int_0^{\infty} 0\,dt \; !$$

$\square$

Musíme tedy předpokládat ještě něco navíc o posloupnosti $\langle f_n \rangle$, aby platila analogická věta i pro případ ~~ne~~ nevlastního integrálu. Extra podmínka, kterou bude muset funkční posloupnost $\langle f_n \rangle$ splňovat je, že všechny členy f_n jsou „kontrolovány" nebo „dominovány" jistou funkcí „g", která je sama integrovatelná na intervalu $\langle a, \infty)$.

<u>Věta 25.</u> Nechť $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost spojitých funkcí na intervalu $\langle a, \infty)$ a nechť $f_n \rightrightarrows f$ na libovolném intervalu $\langle a, b \rangle$. Dále předpokládejme, že existuje spojitá funkce g def. na intervalu $\langle a, \infty)$ taková, že

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in \langle a, \infty), \forall n \in \mathbb{N},$$

a je integrál $\int_a^\infty g(x)\,dx$ existuje. Potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(t)\,dt = \int_a^\infty f(t)\,dt.$$

Důkaz. Zde provádět nebudeme. $\square$

Věta 26. Nechť $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ je funkční posloupnost taková, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $f_n \in C^1(\langle a,b\rangle)$, tj. f_n má na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitou derivaci. Jestliže pak funkční posloupnost $\langle f_n' \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ na intervalu $\langle a,b\rangle$ stejnoměrně konverguje k jisté funkci a posloupnost $\langle f_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ bodově konverguje k funkci f na $\langle a,b\rangle$, pak je funkce f na $\langle a,b\rangle$ diferencovatelná a platí:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \text{pro všechna } x \in \langle a,b\rangle.$$

Důkaz. Položme $g := \lim_{n\to\infty} f_n'$. Jelikož $f_n' \rightrightarrows g$ na $\langle a,b\rangle$, pak díky větě 17 je funkce g na $\langle a,b\rangle$ spojitou funkcí. Dále z věty 19 vyplývá, že

$$(*) \qquad \int_a^x g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt, \quad \forall x \in \langle a,b\rangle.$$

Aplikací Newton-Leibnizova vzorce dostaneme

$$(**) \qquad \int_a^x f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(a), \quad \forall x \in \langle a,b\rangle \text{ a } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nyní přejdeme ve vztahu $(**)$ k limitě pro $n \to \infty$:

$$\int_a^x g(t)\,dt \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \left[f_n(x) - f_n(a) \right] =$$

$$= f(x) - f(a), \quad \forall x \in \langle a,b\rangle.$$

Odtud dostáváme $\forall x \in \langle a,b\rangle$:

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt + f(a).$$

Nyní protože funkce g je na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá, platí tedy $\forall x \in \langle a,b\rangle$:

$$f'(x) = g(x).$$ ■

Pro funkční řady má potom předchozí věta tato formu:

<u>Důsledek 27.</u> Nechť $\langle f_k\rangle_{k\in N}$ je posloupnost funkcí ~~f_k~~ taková, že $\forall k\in N$ je $f_k \in C^1(\langle a,b\rangle)$ a nechť $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ na $\langle a,b\rangle$. Jestliže pak řada $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'$ stejnoměrně na $\langle a,b\rangle$ konverguje, potom

$$f' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k' \text{ na } \langle a,b\rangle.$$