# Funkční řady

**Příklad 1.** Určete obor bodové konvergence funkční řady.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$

Řešení: Daná řada je geometrickou řadou s kvocientem $q = x$. Taková řada konverguje právě když $|q| < 1$, tj. když $|x| < 1$. Tedy interval $D = (-1, 1)$ tvoří obor konvergence dané řady.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n \cdot x^{n-1} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$

Řešení: Vyšetřujme absolutní konvergenci s využitím podílového kritéria:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)\,x^n}{n\,x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}|x| =$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |x| \cdot 1 = |x|.$$

Daná řada $\overbrace{\text{konverguje}}^{\text{(absolutně}}$, když $L < 1$, tj. když $|x| < 1$.
Vyšetříme ještě nutnou podmínku konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \cdot n\, x^{n-1} = 0 \iff |x| < 1.$$

Tedy obor konvergence je množina $D = (-1, 1)$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

Řešení: Opět vyšetříme nejdříve absolutní konvergenci s pomocí podílového kritéria:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} =$$

$$= |x| \cdot 0 = 0.$$

$L < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ daná řada absolutní konverguje a pro každé $x \in \mathbb{R}$ absolutně.

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 10^n \cdot x^n = 10x - 10^2 \cdot x^2 + 10^3 \cdot x^3 - \dots$$

Řešení: Zkoumejme absolutní konvergenci s pomocí odmocninového kritéria:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{10^n |x|^n} = 10 \cdot |x|, \quad L < 1 \Leftrightarrow 10|x| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ obor konvergence je $D = \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$.

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$$

Řešení: Nutná podmínka konvergence $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ je splněna $\forall x \in \mathbb{R}$. Dále $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{\sin^n x}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Nyní protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, plyne odsud s využitím srovnávacího kritéria, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$ absolutně konverguje $\forall x \in \mathbb{R}$. Tedy obor konvergence je $D = (-\infty, \infty)$.

Příklad 2. Zkoumejme stejnoměrnou konvergenci dané funkční řady.

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots$$

Řešení: $\forall x \in R$ a $\forall n \in N$: $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$.

Dále víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Z Weierstrassova M-testu pak vyplývá stejnoměrná konvergence dané řady na $D = (-\infty, \infty)$.

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}} = \frac{\cos x}{e^x} + \frac{\cos 2x}{e^{2x}} + \frac{\cos 3x}{e^{3x}} + \dots$$

Dokažte, že pro $0 < a$ je daná řada stejnoměrně konvergentní na $D = \langle a, \infty)$.

Řešení: $\forall x \in D$ a $\forall n \in N$ máme:

$$\left|\frac{\cos nx}{e^{nx}}\right| \leq \frac{1}{e^{nx}} \leq \frac{1}{e^{a \cdot n}}.$$

Zkoumejme ještě konvergenci číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n \cdot a}}$ s pomocí podílového kritéria:

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{e^{(n+1)a}} \cdot e^{na} = \frac{1}{e^a} < 1. \ (0 < a)$$

Z Weierstrassova M-testu pak plyne stejnoměrná konvergence na $D = \langle a, \infty)$, $0 < a$.

c) Uvažujme funkční řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.

Dokažme stejnoměrnou konvergenci na $D = (-\infty, \infty)$.

Řešení: $\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3} = \operatorname{arctg} 0 = 0$, $\forall n \in N$.

Odsud pak plyne, že $\forall n \in N$ funkce $f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$ na $R$ nabývá absolutní minimum i absolutní maximum. Z lichosti funkce $f_n(x)$ pak plyne, že

$$\min_{x\in(-\infty,\infty)} f_n(x) = -\max_{x\in(-\infty,\infty)} f_n(x).$$

$\forall n \in N$ a $\forall x \in (-\infty,\infty)$ ex. derivace:

$$f_n'(x) = \frac{2n^3-2x^2}{(x^2+n^3)^2+4x^2}.$$ Pak $f_n'(x)=0 \iff$

$$\iff 2n^3-2x^2=0 \iff x = \begin{cases} n\sqrt{n} \\ -n\sqrt{n} \end{cases},$$

tedy

$$\max_{x\in(-\infty,\infty)} f_n(x) = f_n(n\sqrt{n})$$ a

$$\min_{x\in(-\infty,\infty)} f_n(x) = f_n(-n\sqrt{n}).$$

Odsud $\forall n \in N$ a $\forall x \in (-\infty,\infty)$ plyne:

$$|f_n(x)| \leq |f_n(-n\sqrt{n})| = |f_n(n\sqrt{n})| =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = M_n.$$ Zkoumejme nyní konvergenci číselné řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n}}{n^2}.$$

Jedná se o řadu s kladnými členy. Přitom $\forall n \in N$ je

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n}}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = n^{-3/2}$$

(stačí si uvědomit, že funkce $y = \operatorname{arctg} x$ na intervalu $\langle 0, \frac{\sqrt{n}}{n^2}\rangle$ splňuje předpoklady Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Pak $\forall n \in N$ $\exists c_n \in (0, \frac{\sqrt{n}}{n^2})$ tak, že $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{n^2} - \operatorname{arctg} 0 = \cancel{(\operatorname{arctg} c_n)}$

$$= (\operatorname{arctg})'(c_n)\cdot\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2} - 0\right) = \frac{1}{1+c_n^2}\cdot\frac{\sqrt{n}}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2}.\Big)$$

Nyní vyšetříme konvergenci číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ s použitím integrálního kritéria:

$$\int_1^{\infty} x^{-3/2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-2\cdot x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^t =$$

$$= -2\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 1\right) = 2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} < \infty.$$

Tedy majorantní řada $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{n^2}$ je konvergentní

a dle Weierstrassova M-testu pak funkční řada

$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}$ je na $D=(-\infty,\infty)$ stejnoměrně

konvergentní.