Mocninné řady

Limes inferior, limes superior

1) Doplňme definici infima a suprema takto:

a) $\inf \emptyset := \infty$, $\sup \emptyset := -\infty$.

b) Je-li $M \subset \mathbb{R}$ a M je shora neomezená množina, pak $\sup M := \infty$.

c) Je-li $M \subset \mathbb{R}$ a M je zdola neomezená množina, pak $\inf M := -\infty$.

2) Připomeňme, že máme-li dánu posloupnost $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ a platí: $\lim_{n\to\infty} x_n = L \in \mathbb{R}$, pak z definice limity posloupnosti plyne, že je-li $\alpha < L < \beta$, pak musí podmínka $\alpha < x_n < \beta$ platit pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Někdy stačí využít pouze polovinu této informace jak ukazuje tento příklad:

Příklad 1. Ať $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost kladných reálných čísel taková, že:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L < 1.$$

Pak $x_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Skutečně, zvolíme-li $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, že $\alpha < L < \beta < 1$, pak platí:

$$\alpha < \sqrt[n]{x_n} < \beta < 1 \quad \text{pro skoro všechna}$$

$n \in \mathbb{N}$. Dále využijeme pouze to, že:

$$\sqrt[n]{x_n} < \beta < 1 \quad \text{pro skoro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Odtud plyne pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < x_n < \beta^n, \quad \text{kde } \beta \in (0,1).$$

Pak protože $\lim_{n\to\infty} \beta^n = 0$, dostaneme aplikací věty o sevření, že $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Definice ~~1~~ 2 (limes superior – horní limita).
Mějme dánu reálnou posloupnost $\langle x_n \rangle_{n\in N}$. Pak číslo $\limsup_{n\to\infty} x_n$ (nebo $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$) definované jako infimum ze všech čísel $\beta \in \mathbb{R}$ takových, že pro skoro všechna $n \in N$ je $x_n < \beta$ nazveme limes superior nebo horní limitou posloupnosti $\langle x_n \rangle_{n\in N}$.

Definice 3 (limes inferior – dolní limita).
Mějme dánu reálnou posloupnost $\langle x_n \rangle_{n\in N}$. Pak číslo $\liminf_{n\to\infty} x_n$ (nebo $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$) definované jako supremum ze všech čísel $\alpha \in \mathbb{R}$ takových, že pro skoro všechna $n \in N$ je $\alpha < x_n$ nazveme limes inferior nebo dolní limitou posloupnosti $\langle x_n \rangle_{n\in N}$.

Domácí úkol 3. a) Dokažte, že
1) $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty \iff \langle x_n \rangle_{n\in N}$ není skoro omezená;
2) $\limsup_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff x_n \to -\infty$ pro $n \to \infty$;
3) Formulujte a dokažte analogická tvrzení pro limes inferior.

b) Nechť je dána reálná posloupnost $\langle x_n \rangle_{n\in N}$. Ukažte, že pak platí: $\liminf_{n\to\infty} x_n \leqq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

c) Nechť je dána reálná ~~po~~ posloupnost $\langle x_n \rangle_{n\in N}$, ukažte že posloupnost $\langle x_n \rangle_{n\in N}$ je konvergentní právě když $L = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Pak platí:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L.$$

d) Nechť je dána reálná posloupnost $\langle x_n \rangle_{n\in N}$. Ukažte, že

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}\right),$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}\right).$$

Definice 4 (Pojem mocninné řady).
Funkční řadu tvaru:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

nebo obecněji funkční řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots$$

budeme nazývat mocninnou řadou se středem v bodě $c \in \mathbb{R}$. Čísla a_k pak nazýváme koeficienty mocninné řady.

Konvergence mocninných řad

Příklady 5. V následujících příkladech budeme vyšetřovat, pro jaká $x \in \mathbb{R}$ konverguje daná mocninná řada.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k = x + 4x^2 + 27x^3 + \dots$

Pak $\lim_{k\to\infty} k^k \cdot x^k = \lim_{k\to\infty} (k \cdot x)^k = 0 \iff x = 0.$

Tedy řada konverguje právě když $x=0$, tj. oborem konvergence je jednoprvková množina $\{0\}$.

b) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (geometrická řada s kvocientem $q = x$). V tomto případě je oborem konvergence této mocninné řady interval $(-1, 1)$.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

V tomto případě s využitím odmocninového Cauchyova kritéria dostáváme, že řada konverguje pokud $x \in (-1,1)$ a diverguje pro $|x| > 1$. Tož.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|x|^k}{k}} = \lim_{k\to\infty} |x| \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = |x|.$$

Pro $x = 1$ je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ (harmonická řada!)

Pro $x = -1$ je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -\ln 2$ (jedná se o alternující řadu jejíž konvergenci lze dokázat s pomocí Leibnizova kritéria.)

Tedy oborem konvergence je interval $\langle -1, 1)$.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots$

Konvergenci této řady lze též zkoumat s pomocí podílového nebo odmocninového kritéria. Jednodušší je ale užít srovnávacího kritéria:

$$\left|\frac{x^k}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2} \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle \quad \text{a}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

Je-li $|x| > 1$, pak $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{x^k}{k^2}\right| = \infty$ a tedy řada konverguje právě když $|x| \le 1$ a oborem konvergence je tentokrát uzavřený interval $\langle -1, 1 \rangle$.

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \dots$

S využitím Cauchyova odmocninového kritéria lze ukázat, že řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|x|^k}{k^k}} = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0.$$

(Podílové kritérium je možné také použít.)
Často jednodušší je užití srovnávacího kritéria:

$$\left|\frac{x}{k}\right|^k < \frac{1}{2^k} \quad \text{je-li} \quad k \geq 2|x|.$$

Odtud plyne srovnáním s geometrickou řadou $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^k$ konverguje $\forall x \in \mathbb{R}$.

Obor konvergence je tedy interval $(-\infty, \infty)$.

Jak výše uvedené příklady naznačují, tak Cauchyovo odmocninové kritérium je základním kritériem pro určení oboru konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-c)^k.$$

<u>Věta 6</u> (<u>Zobecněné Cauchyovo odmocninové kritérium</u>).
Mějme dánu číselnou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Položme
$L := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

a) Je-li $L < 1$, pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.
b) Je-li $L > 1$, pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.
c) Je-li $L = 1$, pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ může divergovat i konvergovat, což znamená, že nelze podle tohoto kritéria rozhodnout o konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Pokud použijeme zobecněné Cauchyovo odmocninové kritérium pro vyšetření konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k,$$

pak počítáme:

$$s := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \implies$$

$$L = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\,|x-c|^k} = \limsup_{k\to\infty} |x-c| \sqrt[k]{|a_k|}$$
$$= s \cdot |x-c|.$$

Je-li $L = s|x-c| < 1$, pak řada absolutně konverguje a je-li $L = s|x-c| > 1$, pak řada diverguje.

Je-li $0 < s < \infty$, pak řada konverguje na intervalu

$$(c - 1/s,\ c + 1/s)$$

a diverguje vně intervalu:

$$\langle c - 1/s,\ c + 1/s \rangle.$$

Podle tohoto testu nelze rozhodnout o konvergenci v koncových bodech $x = c \pm \frac{1}{s}$ těchto intervalů.
Interval konvergence je tedy jedním ze čtyř intervalů:

$(c - 1/s, c + 1/s)$, $\langle c - 1/s, c + 1/s)$, $(c - 1/s, c + 1/s\rangle$, $\langle c - 1/s, c + 1/s\rangle$.

Je-li $s = 0$, pak $1/s := \infty$ a interval konvergence je roven $(-\infty, \infty)$ a je-li $s = \infty$, pak $1/s := 0$ a interval konvergence je jednoprvkovou množinou $\{c\}$, tedy degenerovaným intervalem.

<u>Definice 7.</u> Mějme dánu mocninnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$. Potom číslo

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

nazýváme <u>poloměrem konvergence</u> této mocninné řady. $R := \infty$ je-li $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, a $R := 0$ je-li $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$.

<u>Věta 8.</u> Mějme dánu mocninnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$ s poloměrem konvergence $R \in \langle 0, \infty) \cup \{\infty\}$.

1) Je-li $R = 0$, pak řada konverguje pouze v bodě $x = c$.

2) Je-li $R = \infty$, pak řada konverguje absolutně $\forall x \in \mathbb{R}$.
3) Je-li $0 < R < \infty$, pak řada absolutně konverguje pro všechna x taková, že $|x-c| < R$ a diverguje pro všechna x taková, že $|x-c| > R$.

Důkaz. Užije se zobecněné Cauchyovo odmocninové kritérium. Viz. diskuze následující věty 6. $\square$

Věta 9. Mějme dánu řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-c)^k$ s poloměrem konvergence R.

1) Je-li $R=0$, pak řada konverguje, právě když $x=c$.
2) Je-li $R=\infty$, pak řada konverguje absolutně a stejnoměrně na každém kompaktním intervalu $\langle a,b \rangle \subset \mathbb{R}$.
3) Je-li $0 < R < \infty$, pak řada konverguje absolutně a stejnoměrně na každém kompaktním intervalu $\langle a,b \rangle \subset (c-R, c+R)$.

Důkaz. Zbývá dokázat tvrzení 2) a 3). Zvolme $\rho \in (0,R)$ tak, aby $\langle a,b \rangle \subset (c-\rho, c+\rho)$. Dále pak vyberme $\rho_0 \in (\rho, R)$. Pak je

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1/R < 1/\rho_0 . \qquad (*)$$

Tedy existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\sqrt[k]{|a_k|} < 1/\rho_0 \quad \text{pro všechna } k \geq N.$$

Nechť tedy $k \geq N$ a $|x-c| < \rho$, pak máme:

$$|a_k (x-c)^k| \leq |a_k| \rho^k \overset{(*)}{<} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k .$$

Jelikož je $\rho/\rho_0 < 1$, platí:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k < \infty .$$

Následně z Weierstrassova M-testu plyne, že řada konverguje absolutně a stejnoměrně na množině

$\{x \in \mathbb{R} : |x-c| < \rho\} \supset \langle a, b\rangle$ a tudíž i na intervalu $\langle a, b\rangle$.

$\square$

Věta 10. Mějme dánu mocninnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$ mající poloměr konvergence $R \in (0, \infty)$ a nechť I je intervalem konvergence této řady (tj. intervalem jehož koncovými body jsou body $c \pm R$ a takový, že ~~1) Jestli~~ řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$ konverguje $\forall x \in I$.)

1) Je-li $I = \langle c-R, c+R\rangle$, pak řada konverguje stejnoměrně (ale ne nutně absolutně) na intervalu $\langle c-R, c+R\rangle$.

2) Je-li $I = (c-R, c+R\rangle$, pak řada konverguje stejnoměrně (ale ne nutně absolutně) na každém intervalu $\langle a, c+R\rangle$ kdykoliv je
$$c-R < a < c+R.$$

3) Je-li $I = \langle c-R, c+R)$, pak řada konverguje stejnoměrně (ale ne nutně absolutně) na každém z intervalů $\langle c-R, b\rangle$ kdykoliv je
$$c-R < b < c+R.$$

4) Je-li $I = (c-R, c+R)$, pak řada konverguje stejnoměrně a absolutně na každém z intervalů $\langle a, b\rangle$ kdykoliv je
$$c-R < a < b < c+R.$$

Důkaz. Případ 4) již byl dokázán ve větě 9. Tvrzení 1) až 3) dokazovat nebudeme. Obvykle se používá k důkazu Abelovo kritérium konvergence. $\square$

Poznámka: Jak jsme si všimli, tak oborem konvergence dané mocninné řady je vždy interval (může být i jednobodový - degenerovaný) jehož koncovými body jsou $c \pm R$, pro $0 \leq R < \infty$ a nebo $\pm\infty$ pro $R = \infty$. Tento interval se obvykle nazývá intervalem konvergence nebo konvergenčním intervalem dané mocninné řady.

Funkce vyjádřené pomocí mocninných řad

Mějme dánu mocninnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$ takovou, že poloměr konvergence $R > 0$.
Pak tato řada reprezentuje jistou funkci f na (minimální) intervalu $(c-R, c+R)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k, \quad |x-c| < R.$$

Konverguje-li daná mocninná řada v jednom nebo v obou koncích intervalu $(c-R, c+R)$, pak tato řada reprezentuje funkci $f(x)$ na intervalu $\langle c-R, c+R)$ nebo $(c-R, c+R\rangle$ nebo $\langle c-R, c+R\rangle$.

Ve shodě s tím, jak jsme motivovali celou kapitolu o funkčních řadách (posloupnostech), budeme chtít vidět, zdali:

1) je funkce f spojitou funkcí na svém def. oboru.
2) Je-li možné funkci f derivovat pomocí derivování mocninné řady člen po členu?
3) Je-li možné funkci f integrovat pomocí integrování mocninné řady člen po členu.

<u>Věta 11.</u> Funkce f reprezentovaná pomocí mocninné řady:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k \quad \text{pro } |x-c| < R$$

je spojitou funkcí na konvergenčním intervalu.
<u>Důkaz.</u> Je-li např. konvergenčním intervalem interval $(c-R, c+R\rangle$, pak z věty 10 vyplývá, že daná řada stejnoměrně na intervalu ~~$(c-R, c+R)$~~ $\langle a, c+R\rangle$ k funkci f, kde $\langle a, c+R\rangle \subset (c-R, c+R\rangle$.

Jelikož je každý člen řady $a_k \cdot (x-c)^k$, $k=0,1,2,\dots$ spojitou funkcí na intervalu $(c-R, c+R\rangle$, plyne z důsledku 18 v předch. kapitole spojitost funkce f na ~~$(c-R, c+R\rangle$~~. $\langle a, c+R\rangle$, kdykoliv $c-R < a < c+R$. To už implikuje spojitost funkce f na celém intervalu $(c-R, c+R\rangle$. $\square$

Věta 12. Nechť je funkce f reprezentovaná mocninnou řadou:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

na konvergenčním intervalu I. Pak $\forall x \in I$ je fce f integrovatelná na intervalu $\langle c, x\rangle$ (resp. $\langle x, c\rangle$ je-li $x < c$) a platí:

$$\int_c^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-c)^{k+1}. \qquad (*)$$

Důkaz. Je-li bod x prvkem konvergenčního intervalu I, pak mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$ stejnoměrně konverguje na $\langle c, x\rangle$ (resp. na $\langle x, c\rangle$ pro $x < c$). Tvrzení pak plyne z příslušné věty o integraci funkční řady člen po členu, (viz. předch. kapitola.) $\square$

Lemma 13. Nechť má řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$ poloměr konvergence R. Potom mocninná řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k (x-c)^{k-1}, \qquad (*)$$

která vznikla derivováním člen po členu výchozí řady má poloměr konvergence též roven R.

Důkaz. Poloměr konvergence výchozí řady se počítá pomocí vzorce:

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad)$$

a poloměr druhé řady (*) se počítá pomocí vzorce:

$$R' = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|}}.$$

Jelikož je $\sqrt[k]{k} \to 1$ pro $k\to\infty$, tak $R = R'$ (mohou být též oba rovny nule nebo nekonečna.) $\square$

Věta 14. Nechť má mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$ poloměr konvergence $R > 0$ a nechť

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k,$$

kdykoliv $|x-c| < R$. Potom je funkce f na intervalu $(c-R, c+R)$ diferencovatelná a $\forall x \in (c-R, c+R)$ platí:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-c)^{k-1}.$$

Důkaz. Z předchozího lemmatu 13 vyplývá, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-c)^{k-1}$ má též poloměr konvergence roven číslu R. Pak víme, že obě řady stejnoměrně konvergují na každém intervalu $\langle a, b\rangle$ takovém, že $\langle a, b\rangle \subset (c-R, c+R)$. Je-li tedy $x_0 \in (c-R, c+R)$ libovolný pevně zvolený bod, ex. interval $\langle a, b\rangle \subset (c-R, c+R)$ tak, že $x_0 \in (a, b)$. Pak podle důsledku 27 z předch. kapitoly máme:

$$f'(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k (x-c)^k\right]'\Big|_{x=x_0} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x_0-c)^{k-1}. \quad \square$$

Je zřejmé, že lze předchozí větu aplikovat i na řadu:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k (x-c)^{k-1}, \quad \text{kde } |x-c| < R.$$

Obdržíme formuli pro vyjádření druhé derivace $f''(x)$:

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) a_k (x-c)^{k-2}.$$

Tedy:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2(x-c) + \dots$$

kde $x \in (c-R, c+R)$. Položíme-li pak $x = c$, dostaneme:

$$f(c) = a_0$$
$$f'(c) = a_1$$
$$f''(c) = 2a_2.$$

Kdybychom takto pokračovali, mohli bychom vyjádřit derivaci $f^{(k)}$ libovolného řádu pomocí mocninné řady na $(c-R, c+R)$. Důkaz vyžaduje použití principu matematické indukce.

<u>Věta 15.</u> Nechť má mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-c)^k$ poloměr konvergence $R > 0$. Pak má funkce

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k \qquad (*)$$

derivace všech řádů na $(c-R, c+R)$ a tyto derivace lze vyjádřit ~~po~~ pomocí postupného derivování člen po členu v $(*)$. Koeficienty a_k v $(*)$ lze pak vyjádřit pomocí funkčních hodnot derivací funkce f v bodě c vzorci:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}.$$

Důkaz. DÚ. $\square$

Důsledek 16. Předpokládejme, že dvě ~~mocn~~ mocninné řady:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k,$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-c)^k$$

splývají na nějakém intervalu se středem v bodě c, tj. existuje číslo $\rho > 0$ takové, že $f(x) = g(x)$, kdykoliv $|x-c| < \rho$. Pak $a_k = b_k$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$

Důkaz. Bezprostředně z věty 15 vyplývá, že

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} = \frac{g^{(k)}(c)}{k!} = b_k,$$

pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\square$

Příklad 17. Jak víme, funkce $f(x) = e^x$ má v bodě $c=0$ derivace všech řádů a platí:

$$f^{(k)}(0) = e^0, \text{ pro všechna } k = 1, 2, \ldots$$

$f(0) = e^0 = 1$. Pokud by tedy platilo:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

muselo by být $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$

Avšem z dosud uvedených poznatků neplyne nutně, že
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{na nějakém intervalu}$$
$(-\rho, \rho)$, $\rho > 0$. □

<u>Příklad 18.</u> Uvažujme funkci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
Pak máme:
$$a_k = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^j, & \text{je-li } k = 2j \\ \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0, & \text{je-li } k = 2j-1. \end{cases} \qquad (*)$$

Tedy pokud ex. $\rho > 0$ tak, že
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$
pak musí koeficienty a_k splňovat vztahy $(*)$, tj. platilo by
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^j x^{2j} + \ldots \qquad (**)$$
Z teorie číselných řad víme, že poslední řada je geometrickou řadou která konverguje, právě když $x \in (-1,1)$ a platí zde $(**)$. Tedy funkci $f(x)$ lze reprezentovat na $(-1,1)$ mocninnou řadou $(**)$. Zajímavé je, že tuto funkci nelze reprezentovat mocninnou řadou na intervalu $(-\infty, \infty)$. □

<u>Příklad 19.</u> Uvažujme funkci:
$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0. \end{cases}$$
Pak $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$ je $f^{(k)}(0) = 0$ jak lze dokázat matematickou indukcí (proveďte sami!).

Tedy pokud by existovalo $\rho > 0$ takové, že $\forall x \in (-\rho, \rho)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$ muselo by $\forall k = 0, 1, 2, \dots$ platit

$a_k = 0$. To by znamenalo, že $f \equiv 0$ na $(-\rho, \rho)$, což není pravda neboť $e^{-1/x^2} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

Tedy fce $f(x)$, která má na $\mathbb{R}$ derivace všech řádů (prověřte!) není součtem příslušné mocninné řady na žádném intervalu $(-\rho, \rho)$, kde $\rho > 0$! $\square$

<u>Definice 20.</u> Mějme dánu funkci f, která má derivace všech řádů v bodě $x = c$. Potom řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

nazveme Taylorovou řadou fce f se středem v bodě $x = c$.