Mocninné řady – příklady

Příklad 1. Najděte poloměr konvergence R mocninných řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Řešení: Pro určení poloměru konvergence použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{x^n} \right| = |x| \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x| \Rightarrow$$

$\Rightarrow R = 1$.

Obecně máme-li mocninnou řadu $\sum_{0}^{\infty} a_k (x-c)^k$ a je-li limita (konečná nebo nekonečná):

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|, \text{ pak}$$

$$R = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|. \qquad (1)$$

Tedy v našem případě $R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Pokud bychom použili tzv. Cauchy-Hadamardův vzorec:

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}, \text{ pak bychom} \qquad (2)$$

postupovali takto:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|}} = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}} = 1 \text{ neboť } \sqrt[n]{n} \to 1 \text{ pro } n\to\infty.$$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

Řešení: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty.$

c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 5^k x^{3k}$.

Řešení: Označme $5x^3 = t$, pak máme:

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} 5^k \cdot x^{3k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (5x^3)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} t^k$. Poslední řada konverguje ~~právě~~ když je $|t| < 1$ a diverguje pro $|t| > 1$. To znamená, že výchozí řada konverguje když $|5x^3| < 1$ a diverguje když $|5x^3| > 1$.

To znamená, že $R = 1/\sqrt[3]{5}$.

S použitím Cauchy-Hadamardova vzorce máme:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[3k]{5^k}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[3]{\sqrt[k]{5^k}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}. \quad \square$$

Příklad 2. Najděte konvergenční interval mocninných řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} (x-1)^n$.

Řešení: Najdeme nejdříve poloměr konvergence R:

$$R \overset{(1)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{2n+1}{3n^2+2} \cdot \frac{3\cdot(n+1)^2+2}{2\cdot(n+1)+1}\right| = 1.$$

Vyšetřeme vlastnost konvergence v koncových bodech konvergenčního intervalu: $x = 0$ a $x = 2$.
Pro $x = 0$ dostáváme řadu: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n^2+2}$.

Dle Leibnizova kritéria tato řada konverguje, neboť se jedná o alternující řadu a $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} = 0$.

Pro $x = 2$ dostaneme číselnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2}$.

Ukažme pomocí srovnávacího kritéria divergenci této řady. Je-li $a_n := \frac{2n+1}{3n^2+2} \cdot \frac{3n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, pak zřejmě

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Tudíž existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$:

$\frac{1}{2} < a_n$. Odtud dostáváme $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3n} = \frac{1}{3n} < a_n \frac{2}{3n} = \frac{2n+1}{3n^2+2}$. Protože víme, že

$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{3n} = \infty$, platí: $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} = \infty$.

Konvergenčním intervalem je interval $\langle 0, 2)$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n \ln^2(n+1)}$.

Řešení: Určeme poloměr konvergence s pomocí podílového kritéria (vzorec (1)):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n}{n \cdot \ln^2(n+1)} \cdot \frac{(n+1) \cdot \ln^2(n+2)}{2^{n+1}} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln^2(n+2)}{\ln^2(n+1)} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n+2) - \ln(n+1)}{\ln(n+1)} + \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{\overset{\to 0}{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}}{\ln(n+1)}}_{\downarrow \atop \infty} + 1 \Bigg)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \Rightarrow R = \frac{1}{2}.$$

Prověříme konvergenci v koncových bodech konvergenčního intervalu: $x = -\frac{3}{2}$ a $x = -\frac{1}{2}$.

Pro $x = -\frac{3}{2}$ dostáváme po dosazení číselnou řadu: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+1)} (-1)^n$ a pro $x = -\frac{1}{2}$ číselnou řadu: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(n+1)}$. Obě řady pak absolutně konvergují jak lze dokázat s pomocí integrálního kritéria. Totiž

$$\cancel{\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln^2(x+1)}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x \ln^2(x+1)}\,dx}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} \int_2^{\alpha} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty} \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\,dx \end{array} \right|$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \int_{\ln 2}^{\ln \alpha} \frac{1}{u^2}\,du = \lim_{\alpha\to\infty} \left[-\frac{1}{u} \right]_{\ln 2}^{\ln \alpha} = \lim_{\alpha\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln \alpha} + \frac{1}{\ln 2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n} < \infty.$$

Nyní protože $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ platí:

$$\frac{1}{n \cdot \ln^2(n+1)} \leq \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(n+1)} < \infty.$$

Tedy řada absolutně konverguje na intervalu $\langle -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \rangle$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$

<u>Řešení</u>: Určíme poloměr s pomocí Cauchy-Hadamardova vzorce:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{3^{n^2}}} = \frac{1}{3}.$$

Dosazením $x = \pm \frac{1}{3}$ dostáváme číselné řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} (-1/3)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \ldots$$ řada diverguje protože

není splněna nutná podmínka konvergence aby $(-1)^{n^2} \to 0$ pro $n \to \infty$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} (1/3)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\ldots = \infty.$$

Tedy konvergenčním intervalem je interval $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. $\square$

Příklad 3. Najděte součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$.

Řešení:

Vyjdeme z geometrické řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ jejíž konvergenčním intervalem je interval $(-1,1)$ a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad \forall x \in (-1,1).$$

Derivováním této řady člen po členu na intervalu $(-1,1)$ dostáváme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \forall x \in (-1,1). \quad \square$$

Mocninné řady je možné využít ke stanovení součtu číselné řady. Víme-li například, že číselná řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje, pak její součet je možné vyčíslit pomocí formule:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{x\to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k. \qquad (3)$$

Příklad 4. Dokažte, že

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Řešení: a) Zkoumejme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

Poloměr konvergence této mocninné řady je $R =$

$$= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}}} = 1.$$ Pokud pak

budeme tuto řadu na intervalu $(-1,1)$ derivovat člen po členu, dostaneme řadu: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$. Poloměr ~~této řady~~ konvergence je opět $R=1$. Dále $\forall x \in (-1,1)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}.$$ Je-li pak

$x \in (0,1)$, platí:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in (0,1): \operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

~~Pokud nyní využijeme vzorec (3), dostaneme~~
Dále se zjistí, že pro $x=1$, řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ konverguje, neboť se jedná o alternující

číselnou řadu. Konečně, použijeme-li vzorec (3), dostaneme: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} =$

$= \lim_{x\to 1-} \operatorname{arctg} x = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$.

f) Opět s využitím Leibnizova kritéria zjistíme, že číselná alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konverguje.

Dále zvyšetřujme mocninou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$.

Poloměr konvergence je $R=1$. Budeme-li nyní tuto řadu derivovat člen po členu, dostaneme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1}, \quad x \in (-1,1).$$

Pak $\forall x \in (-1,1)$ je:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}.$$

Odtud máme pro $x \in (0,1)$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln|1+x| = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^{n-1} t^{n-1}\,dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \overset{(3)}{=} \lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n =$

$= \lim_{x\to 1-} \ln(1+x) = \ln 2$. $\square$

Taylorovy řady

Je-li funkce f definovaná na nějakém okolí bodu $x=c$ a má-li v tomto bodě derivace všech řádů, pak mocninnou řadu tvaru:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k, \quad \text{kde } f^{(0)}(c) := f(c),$$

nazýváme Taylorovou řadou funkce f v bodě $x=c$ (nebo se středem v bodě $x=c$.)(*)

Funkci f nazveme analytickou funkcí v bodě $x=c$, jestliže $\exists\, \rho > 0$ tak, že

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k,$$

kdykoliv je $|x-c| < \rho$.

U elementárních funkcí je obvyklé, že jsou analytickými funkcemi v každém bodě uvnitř svého def. oboru. Nicméně nelze vyloučit výjimečné body kde i poměrně jednoduché funkce nejsou analytické.

Př. a) Fce $f(x) = |x|$ není analytická v bodě $x=0$ neboť neex. derivace $f'(0)$.

b) Fce $f(x) = |x|^3$ není analytická v bodě $x=0$ protože zatímco derivace $f'(0)$ a $f''(0)$ existují, $f'''(0)$ už neexistuje (ověřte!)

c) Funkce $f(x)$ definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x=0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \end{cases}$$

není analytická v bodě $x=0$. V tomto případě

(*) V případě, kdy je $c=0$ mluvíme o tzv. Maclaurinově řadě.

má sice funkce f v bodě $x=0$ derivace všech řádů ale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \iff x=0 .$$

(viz. Půdnáška, Př. 19.)

Má-li fce f v bodě $x=c$ derivace všech řádů $f^{(k)}(c)$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme:

$$r_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k .$$

Nutné k tomu, aby funkce f byla v bodě $x=c$ analytickou funkcí je nutné a stačí, aby existovala konstanta $\rho > 0$ taková, že

$r_n \to 0$ bodově na intervalu $(c-\rho, c+\rho)$,

tj: $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, $\forall x \in (c-\rho, c+\rho)$.

Připomeňme, že v 1. ročníku se nazval výraz $r_n(x)$ zbytkem v Taylorově vzorci. Víme též, že za výše uvedeného předpokladu je možné pro x dostatečně blízké bodu ~~x~~ c vyjádřit zbytek $r_n(x)$ ve tvaru:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1},$$ kde ξ leží mezi

body x a c (tzv. Lagrangeův tvar zbytku), nebo:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt ,$$

(tzv. integrální tvar zbytku), a zbytek v Cauchyově tvaru:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c + \theta(x-c)) (1-\theta)^n (x-c)^{n+1}, \ \theta \in (0,1) .$$

<u>Věta</u> (<u>postačující podmínka aby funkce byla analytická v bodě</u>).
Předpokládejme, že funkce f má derivace všech řádů na jistém okolí $U(c)$ bodu c. Předpokládejme, že existuje konstanta $M>0$ tak, že pro všechna $x \in U(c)$ a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí:

$$|f^{(k)}(x)| \leq M.$$

Pak je funkce f analytická v bodě c a $\forall x \in U(c)$ platí:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k.$$

<u>Rozvoj některých elementárních funkcí v Maclaurinovu řadu, tj. v Taylorovu řadu se středem v bodě $x=0$.</u>

1. Exponenciála:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

2. Hyperbolický kosinus a sinus:

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

3. Trigonometrické funkce:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Zde všude je $x \in (-\infty, \infty)$, tj. poloměr konvergence je roven $+\infty$.

~~4. Mo~~

4. Mocninná funkce:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{\alpha}^{k} x^{k},$$

kde $C_{\alpha}^{k} := \dfrac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$, k. ~~$\alpha \neq 0, \alpha \neq$~~

Je-li $\alpha > 0$, pak $x \in \langle -1, 1\rangle$,
je-li $-1 < \alpha < 0$, pak $x \in (-1, 1\rangle$,
a je-li $\alpha \leq -1$, pak $x \in (-1, 1)$.

5. Cyklometrické funkce:

$$\arcsin x = \cancel{\sum_{k=0}^{\infty}}\; x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \ldots$$

$x \in \langle -1, 1\rangle$.

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle.$$

6. Logaritmická funkce:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{k}}{k}, \qquad x \in (-1, 1\rangle$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k}}{k}, \qquad x \in \langle -1, 1).$$

<u>Příklad 1.</u> Rozviňme funkci $f(x) = \cos x$ v Maclaurinovu řadu.

<u>Řešení</u>: Postupně počítejme derivace vyšších řádů funkce $\cos x$ v bodě $x = 0$:

$f(0) = \cos 0 = 1$, $f'(x) = -\sin(x) \Rightarrow f'(0) = 0$,

$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1$, $f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(0) = 0$,
$f^{IV}(x) = \cos x \Rightarrow \cancel{f^{IV}(x)}$ $f^{IV}(0) = 1, \dots$

Tedy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + \frac{0}{1!} x + \frac{-1}{2!} x^2 + \frac{0}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 +$
$+ \frac{0}{5!} x^5 + \frac{-1}{6!} \cdot x^6 + \frac{0}{7!} x^7 + \frac{1}{8!} x^8 + \dots$

Protože $\forall x \in \mathbb{R}$ je $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, platí:

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots,$$
$x \in (-\infty, \infty)$.

Příklad 2. Rozviňme v Maclaurinovu řadu funkci $f(x) = \sin x$.

Řešení: Je možné pochopitelně postupovat jako v předchozím příkladu a nebo výhodněji pomocí integrování člen po členu řady pro funkci $\cos x$ – viz. Věta 12 z přednášky. Tedy $\forall x \in (-\infty, \infty)$ máme:

$$\sin x = \int_0^x \cos t \, dt = \int_0^x 1 \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{1}{(2n)!} t^{2n} \, dt$$
$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}. \qquad \square$$

Cvičení 1. Dokažte si následující rozvoje funkcí:

a) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty)$,

b) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1)$,

c) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot x^4 + \dots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$.

d) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \dots,$ $x \in (-1,1)$.

e) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \dots,$ $x \in (-1,1\rangle$.

Připomeňme, že rozvoje b) - e) jsou speciálním případem rozvoje fce $(1+x)^\alpha$ uvedeného výše (- str. 11 bod 4.)

Cvičení 2. Určete Maclaurinův rozvoj daných funkcí s využitím rozvojů uvedených ve cvičení 1, ověřte si uvedené výsledky!

a) $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots,$ (Návod: dosadíme do rozvoje fce e^x $(-x)$ za x.)

b) $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}(2x)^{n-1} + \dots,$

(Návod: do rozvoje pro funkci e^x dosadíme $2x$ za x.)

c) $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \dots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!} + \dots$

(Návod: do rozvoje pro funkci e^x $(-x^2)$ za x.)

d) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots$

(Návod: do rozvoje funkce $\frac{1}{1+x}$ dosadíme $-x$ za x.)

e) $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1}x^{2(n-1)} + \dots$

(Návod: do rozvoje funkce $\frac{1}{1+x}$ dosadíme x^2 za x.)

f) $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \dots - \frac{1}{n}x^n - \dots$

(Návod: do rozvoje funkce $\ln(1+x)$ dosadíme $-x$ za x.)

g) $\sqrt{1-x^3} = 1 - \frac{1}{2\cdot 1!}x^3 - \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^6 - \frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^9 - \dots$

(Návod: do rozvoje funkce $\sqrt{1+x}$ dosadíme $-x^3$ za x.)

h) $1/\sqrt{1-x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \dots$

(Návod: do rozvoje funkce $1/\sqrt{1+x}$ dosadíme $-x^2$ za x.)

k) $1/\sqrt{1-x^3} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^9 + \dots$

(Návod: do rozvoje funkce $1/\sqrt{1+x}$ dosadíme $-x^3$ za x.)

m) $1/\sqrt{1+x^4} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^8 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{12} + \dots$

(Návod: do rozvoje funkce $1/\sqrt{1+x}$ dosadíme x^4 za x.).

Příklad 3. Užijeme rozvoj funkce $y = \frac{1}{1+x}$ pro nalezení rozvoje funkce $y = \frac{1}{3-2x}$.

Řešení: Úprava funkce: $\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}x}$. Nyní užijeme rozvoj:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad x \in (-1,1),$$

kde za x dosadíme $-\frac{2}{3}x$:

$$\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3}\left[1 - \left(-\frac{2}{3}x\right) + \left(-\frac{2}{3}x\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}x\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[1 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{27}x^3 + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{9}x + \frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{81}x^3 + \ldots$$

□

Cvičení 3. Užitím rozvojů funkcí $\sin x$, $\cos x$ (viz. Př. 1) najděte rozvoje následujících funkcí:

a) $\sin \frac{x}{2}$; (do rozvoje funkce $\sin x$ dosaďte $\frac{x}{2}$ za x:
$\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!} + \ldots$)

b) $\cos 2x$; (do rozvoje funkce $\cos x$ dosaďte $2x$ za x:
$1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \ldots$)

c) $\cos \sqrt{x}$; (do rozvoje funkce $\cos x$ dosaďte $\sqrt{x}$ za x:

$1 - \frac{1}{2!}x + \frac{1}{4!}x^2 - \frac{1}{6!}x^3 + \frac{1}{8!}x^4 - \ldots$)

d) $\sin x^2$; (do rozvoje funkce $\sin x$ dosaďte x^2 za x:

$x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots$)

Příklad 4. Integrací rozvoje funkce $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (viz. Cv. 2 (h)) najděte rozvoj funkce $\arcsin x$.

Řešení: Uvědomme si, že $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$, $x \in (-1,1)$,

dále $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \dots$

Pak
$$\arcsin x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int 1\cdot dx + \int \frac{1}{2}x^2\,dx +$$
$$+ \int \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4\,dx + \int \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6\,dx + \dots =$$
$$= x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \dots, \quad x \in (-1,1).$$

Cvičení 4. Najděte rozvoj funkce $\operatorname{arctg} x$ pomocí integrace rozvoje funkce $\frac{1}{1+x^2}$ (viz. Cv. 2 (e)).

$$\left(\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots\right)$$

Poznámka: Rozvoje funkcí $x\cdot f(x)$ nebo $\frac{f(x)}{x}$ provedeme násobením nebo dělením známého rozvoje funkce číslem $x \neq 0$.

Příklad 5. a)
$$x\cdot\cos x = x\cdot\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots\right] =$$
$$= x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \dots \quad (x \in (-\infty,\infty)).$$

b)
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots\right] =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \quad (\text{pro } x \neq 0).$$

Cvičení 5. Určete prvních několik členů rozvoje funkcí:

a) $x\cdot\cos 2x$; $\left(x - \frac{2^2}{2!}\cdot x^3 + \frac{2^4}{4!}\cdot x^5 - \dots,\ x \in (-\infty,\infty).\right)$

b) $(1+x)\cdot e^x$; $\left(1 + 2x + \frac{3}{2!}\cdot x^2 + \frac{4}{3!}\cdot x^3 + \dots\right.$, $\left. x \in (-\infty,\infty)\right)$.

c) $\frac{x}{2-x}$; $\left(x \cdot \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2}\cdot x^2 + \frac{1}{2^3}\cdot x^3 + \dots , -2 \leqq x \leqq 2 \right)$

d) $\frac{e^x - 1}{x}$; $\left(1 + \frac{1}{2!}\cdot x + \frac{1}{3!}\cdot x^2 + \frac{1}{4!} x^3 + \dots , x \in (-\infty, \infty) \right)$

e) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; $\left((1+x)\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^5 + \right.$

$\left. + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \dots , x \in (-1,1) \right)$. □

Rozvoj funkcí $f(x) \pm g(x)$ určíme sčítáním, odčítáním řad, vzniklých rozvojem funkcí $f(x)$, $g(x)$.
Platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n .$$

Výsledná řada má poloměr ~~rovný~~ konvergence rovný nejmenšímu z čísel R_1, R_2, kde R_1 je poloměr konvergence 1. řady a R_2 je poloměr konvergence 2. řady.

Cvičení 6. Určete Maclaurinův rozvoj funkcí:

a) $e^x + \sin x$; $\left(1 + 2x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{2}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \dots , \right.$
$\left. x \in (-\infty, \infty) \right)$.

b) $\sinh x$; $\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots , x \in (-\infty, \infty) \right)$.

c) $\cosh x$; $\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots , x \in (-\infty, \infty) \right)$.

d) $\frac{e^{x^3} - e^{-x^3}}{2x^3}$, $x \neq 0$; $\left(1 + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + \dots + \frac{x^{6(n-1)}}{(2n-1)!} + \dots , \right.$
$\left. x \in (-\infty, \infty) \right)$.

e) $\ln \frac{1+x}{1-x}$; $\left(\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \right. \right.$
$\left. \left. + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1} + \dots , x \in \langle -1, 1 \rangle \right) \right)$.

Rozvoj funkcí tvaru $f(x)\cdot g(x)$ určíme z rozvojů jednotlivých funkcí $f(x)$, $g(x)$ násobením dvou příslušných mocninných řad. Součinem dvou mocninných řad

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ je opět mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, pro jejichž koeficienty c_n platí:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 .$$

Pro poloměr konvergence výsledné řady platí obdobné tvrzení jako u součtu řad.
Při výpočtu koeficientů výsledné řady můžeme postupovat podle těchto schémat:

$$\begin{array}{c|cc|ccc|}
a_0 & a_0 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
b_0 & b_1 & b_0 & b_2 & b_1 & b_0 \\
\hline
c_0 = a_0 b_0 & \multicolumn{2}{c|}{c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0} & \multicolumn{3}{c|}{c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0}
\end{array} \qquad \text{atd.}$$

Příklad 6. Určete několik prvních členů Maclaurinova rozvoje funkce $e^x \cdot \sin x$. Rozvoje jednotlivých funkcí:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$$

$$\sin x = \quad x \quad - \frac{1}{3!}x^3 \quad + \frac{1}{5!}x^5 \quad - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$$

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{6}$, $a_4 = \frac{1}{24}$, …
$b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = -\frac{1}{6}$, $b_4 = 0$, …

$$\begin{array}{c|cc|ccc|cccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{\frac{1}{2}} & \cancel{\frac{1}{6}} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{-\frac{1}{6}} & -\frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\
\hline
c_0 = 0 & \multicolumn{2}{c|}{c_1 = 1 + 0 = 1} & \multicolumn{3}{c|}{c_2 = 0 + 1 + 0 = 1} & \multicolumn{4}{c|}{\cancel{c_3 =}} & \multicolumn{4}{c}{c_3 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$c_4 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0.$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{1}{120} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$c_5 = \frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{30}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{720} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \frac{1}{120} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$c_6 = \frac{1}{120} - \frac{1}{36} + \frac{1}{120} = -\frac{1}{90} .$$

Tedy $e^x \cdot \sin x = 0 + 1\cdot x + 1\cdot x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 0\cdot x^4 - \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{90}x^6 + \ldots =$

$$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{90}x^6 + \ldots$$

Poznámka. Několik prvních členů rozvoje součinu dvou funkcí můžeme získat také násobením polynomů, přičemž dbáme, abychom násobením získali všechny mocniny, jež mají být ve výsledku.

Cvičení 7. Určete Maclaurinův rozvoj funkce:

a) $\ln(1-x)\cdot\ln(1+x)$; $\left(-x^2 - \frac{5}{12}x^4 - \frac{47}{180}x^6 - \ldots\right.$, $\left.x \in (-1,1)\right)$.

b) $(\arcsin x)^2$; $\left(x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{45}x^6 + \ldots, \ x \in (-1,1)\right)$.