2. Primitivní funkce, neurčitý integrál

Primitivní funkce

V následujícím textu bude písmeno J označovat jeden z následujících typů intervalů: $\langle a,b\rangle$, $\langle a,b)$, $(a,b\rangle$, (a,b), $(-\infty,a\rangle$, $(-\infty,a)$, $\langle b,\infty)$, (b,∞), $(-\infty,\infty)$, kde $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$.

Je-li $\varphi: J\to\mathbb{R}$, pak je-li $a\in J$, levý koncový bod intervalu J, klademe $\varphi'(a):=\varphi'_+(a)$. Podobně, je-li $b\in J$ pravým koncovým bodem intervalu J, pak klademe $\varphi'(b):=\varphi'_-(b)$ pokud uvedené derivace existují. V všech derivacích předpokládáme, že jsou vlastní.

Definice 1. Řekneme, že funkce $F: J\to\mathbb{R}$ je na intervalu J primitivní funkcí k funkci $f: J\to\mathbb{R}$, jestliže $\forall x\in J: F'(x)=f(x)$.

Poznámka 2. Z definice primitivní funkce F plyne její spojitost na intervalu J.

Příklady 3.

a) Funkce $f(x)=x$, $x\in J=(-\infty,\infty)$ má na $(-\infty,\infty)$ primitivní funkci : $F(x)=\frac{1}{2}x^2$, $x\in(-\infty,\infty)$ protože $\forall x\in(-\infty,\infty)$: $(\frac{1}{2}x^2)'=x$.

b) Funkce $f(x)=e^x$, $x\in J=(-\infty,\infty)$ má na intervalu $(-\infty,\infty)$ primitivní funkci $F(x)=e^x$, $x\in(-\infty,\infty)$. Zřejmě $\forall x\in(-\infty,\infty)$ je $(e^x)'=e^x$.

c) Nechť $f(x)=|x|$, $x\in J=(-\infty,\infty)$. Zřejmě funkce $F_{c_1}(x)=-\frac{1}{2}x^2+c_1$, kde $x\in(-\infty,0\rangle$

a $c_1 \in \mathbb{R}$ je konstanta, je primitivní funkcí k funkci f na intervalu $(-\infty, 0\rangle$. Platí totiž, že $\forall x \in (-\infty, 0\rangle$: $F_{c_1}'(x) = (-\frac{1}{2}x^2 + c_1)' = -x = |x| = f(x)$.
Podobně funkce $G_{c_2}(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_2$, kde $c_2 \in \mathbb{R}$ je konstanta je primitivní funkcí k funkci f na intervalu $\langle 0, \infty)$. Platí $\forall x \in \langle 0, \infty)$: $G_{c_2}'(x) = (\frac{1}{2}x^2 + c_2)' = x = |x| = f(x)$.

Nyní se pokusíme obě primitivní funkce F_{c_1} a G_{c_2} „slepit" tak, abychom dostali jednu primitivní funkci k funkci na intervalu $(-\infty, \infty)$. Vodítkem pro nás bude Poznámka 2. Určíme totiž konstanty c_1 a c_2 tak, aby:

$$\lim_{x \to 0-} F_{c_1}(x) = \lim_{x \to 0+} G_{c_2} . \qquad (*)$$

$\lim\limits_{x \to 0-} F_{c_1}(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (-\frac{1}{2}x^2 + c_1) = c_1$; $\lim\limits_{x \to 0+} G_{c_2}(x) = \lim\limits_{x \to 0+} (\frac{1}{2}x^2 + c_2) = c_2$. Odtud pak plyne, že $(*) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$. Pak lze definovat primitivní funkci H k funkci f na celém intervalu $(-\infty, \infty)$ takto:

$$H(x) := \begin{cases} F_0(x), & x \leq 0 \\ G_0(x), & x \geq 0 . \end{cases}$$

Pak je získaná funkce spojitá na $(-\infty, \infty)$ a $\forall x \in (-\infty, \infty)$, $x \neq 0$ je $H'(x) = f(x)$. Ověříme ještě, že $H'(0) = f(0) = 0$.

$$H_-'(0) = (F_0)_-'(0) = \left(-\frac{1}{2}x^2\right)'\Big|_{x=0} = -x\Big|_{x=0} = 0 ;$$

$$H_+'(0) = (G_0)_+'(0) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)'\Big|_{x=0} = x\Big|_{x=0} = 0 .$$

Tedy existuje vlastní oboustranná derivace:

$$H'(0) = H'_-(0) = H'_+(0) = 0 = f(0). \quad \square$$

Domácí úkol 4. (limita derivace)

a) Nechť $f: \langle a, b) \to \mathbb{R}$ a předpokládejme, že

1) $f \in C(\langle a, b))$;
2) $\forall x \in (a, b)\ \exists f'(x) \in \mathbb{R}$;
3) existuje limita: $\lim\limits_{x \to a+} f'(x) = L$.

Ukažte, že pak existuje derivace $f'_+(a)$ a platí:

$$f'_+(a) = L.$$

Návod: použijte Lagrangeovu větu o střední hodnotě.

b) Nyní využijte toto tvrzení k výpočtu derivace $H'(0)$ v předchozím příkladu 3(c).

c) Uvažujme funkci f danou na intervalu $(-1, 1)$ předpisem:

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in (-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Tedy funkce f je restrikcí funkce signum na interval $(-1, 1)$. Ukažte, že tato funkce nemá na intervalu $J = (-1, 1)$ primitivní funkci.

Návod: Lze použít např. DÚ 37 b (2) z 1. kapitoly nebo tvrzení z bodu a) o limitě derivace.

Věta 5. Nechť je funkce F primitivní funkcí k funkci f na intervalu J. Pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ je k ní primitivní také funkce $F_c(x) = F(x) + c$. Jsou-li naopak funkce F_1 a F_2 na J primitivní k funkci f, pak $F_1 - F_2 \equiv$ konst. na J.

Důkaz. ($\Rightarrow$): Je-li F primitivní funkcí k funkci f na J a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta, pak $\forall x \in J$:

$$F_c'(x) = (F+c)'(x) = F'(x) = f(x).$$

($\Leftarrow$): Předpokládejme, že funkce F_1 a F_2 jsou primitivními funkcemi k funkci f na J. Položme $\forall x \in J$: $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Pak $\forall x \in J$: $G'(x) = (F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

To ale znamená, že funkce G je na intervalu J konstantní. $\square$

Definice 6. (neurčitý integrál).
Neurčitým integrálem z funkce f na intervalu J se rozumí výraz $F(x)+c$, $x \in J$, kde F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu J a c označuje libovolnou konstantu. Neurčitý integrál z funkce f na intervalu J se bude značit:

$$\int f(x)dx, \quad x \in J.$$

Procedura stanovení neurčitého integrálu z funkce f na intervalu J se nazývá integrací funkce f na intervalu J.

Jako bezprostřední důsledek definice lze pokládat následující větu.

Věta 7. Předpokládejme existenci primitivních funkcí na intervalu J. Pak platí:

1) $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x), \quad \forall x \in J$;

2) $\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad x \in J,\ c \in \mathbb{R}$;

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\int (\alpha f)(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \quad x \in J$;

4) $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx, \quad x \in J$;

5) Je-li $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $x \in J$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak
$$\int f(at+b)\,dt = \frac{1}{a} F(at+b) + C, \quad t \in \tilde{J},$$
kde $\tilde{J} = \{t \in \mathbb{R} : at + b \in J\}$.

Přehled základních neurčitých integrálů

1) $\forall \alpha \in (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) : \int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $x \in (0, \infty)$.

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $x \in \mathbb{R}$.
$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} : \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ na každém z intervalů $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.

2) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ na každém z intervalů $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.

3) $\forall a > 0,\ a \neq 1 : \int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $x \in \mathbb{R}$,

speciálně $\int e^x\,dx = e^x + C$, $x \in \mathbb{R}$.

4) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, $x \in \mathbb{R}$.

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $x \in \mathbb{R}$.

6) $\int (1/\cos^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

7) $\int (1/\sin^2 x)\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$ na každém z intervalů $(n\pi, n\pi + \pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

8) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$, $x \in \mathbb{R}$.

9) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$, $x \in (-1, 1)$.

Poznámka 8. Pro zajímavost uveďme bez důkazu jeden fakt. Platí, že ne vždy je primitivní funkce F k funkci f na nějakém intervalu J elementární funkcí nebo funkcí, kterou je možno vyjádřit ~~pomocí~~

pomocí operací sčítání, násobení, podíl, kompozice nebo inverze z elementárních funkcí. To nastane například u těchto elementárních funkcí:
$f_1(x)=e^{x^2}$, $f_2(x)=\sin(x^2)$, $f_3(x)=\cos(x^2)$ pro $x\in\mathbb{R}$, nebo např. $f_4(x)=\frac{e^x}{x}$, $f_5(x)=\frac{\sin x}{x}$ pro $x>0$.

<u>Věta 9.</u> (<u>1. věta</u> <u>o</u> <u>substituci</u>).
Nechť funkce f má primitivní funkci F na intervalu J. Nechť funkce φ zobrazuje interval I do J a má na intervalu I vlastní derivaci. Potom je funkce $F\circ\varphi$ primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ na intervalu I, tj.

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=\int f(x)\,dx\,,\quad \text{kde}$$

$$x=\varphi(t)\,,\quad t\in I\,,\quad x\in J.$$

<u>Důkaz.</u> Tvrzení věty je důsledkem věty o derivaci složené funkce. $\square$

<u>Příklady 10.</u> a) Má se stanovit neurčitý integrál
$\int 2t\,e^{t^2}\,dt$, kde $t\in\mathbb{R}$.
<u>Řešení:</u> $\varphi:(-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty)$, $\varphi(t)=t^2$, $f:(-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty)$, $f(x)=e^x$. Pak

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=\int 2t\cdot e^{t^2}\,dt=\int e^x\,dx\Big|_{x=t^2}=$$

$$=e^x+C\Big|_{x=t^2}=e^{t^2}+C\,,\quad t\in(-\infty,\infty).$$

b) $$\int\cos^3 t\,dt=\int(1-\sin^2 t)\cdot\cos t\,dt=\left|\begin{array}{l}x=\varphi(t)=\sin t\\ f(x)=1-x^2\\ \varphi:(-\infty,\infty)\to\langle-1,1\rangle\end{array}\right|$$

$$=\int(1-x^2)\,dx=\underbrace{x-\tfrac{1}{3}x^3}_{F(x)}+C=\underbrace{\sin t-\tfrac{1}{3}\sin^3 t}_{(F\circ\varphi)(t)}+C\,,\quad t\in(-\infty,\infty).$$

Věta 11 (2. věta o substituci).
Nechť funkce φ zobrazuje interval I na interval J a má na intervalu I vlastní derivaci, která je buď všude kladná, nebo všude záporná. Je-li funkce $G(t)$ primitivní k f-ci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, pak je funkce $(G\circ\varphi^{-1})(t)$ primitivní k funkci f na J.

Důkaz: Protože je fce φ' na I stále buď kladná nebo záporná a vlastní, je funkce φ ryze monotónní na intervalu I a dle věty o inverzní funkci existuje vlastní derivace funkce φ^{-1} na J a je rovna $1/\varphi^{-1}$. Platí tedy:

$$[G\circ\varphi^{-1}]'(x) = G'(\varphi^{-1}(x))\cdot[\varphi^{-1}]'(x) = G'(t)\cdot\frac{1}{\varphi(t)}\Bigg|_{x=\varphi(t)} =$$

$$= f(\varphi(t))\cdot\cancel{\varphi'(t)}\cdot\frac{1}{\cancel{\varphi'(t)}} = f(\varphi(t)) = f(x).$$

□

Příklad 12. Má se stanovit neurčitý integrál

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx,\quad x\in(-1,1).$$

Řešení:

$$\cancel{\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} x=\varphi(t)=\sin t \\ \varphi: (-\infty,\infty)\to\langle -1,1\rangle \\ \varphi^{-1}: \langle -1,1\rangle\to(-\infty,\infty)\end{array}\right| =}$$

$$\cancel{= \left|\begin{array}{l} x=\varphi(t)=\sin t,\quad t\in\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle \\ t=\varphi^{-1}(x)=\arcsin x,\quad x\in\langle -1,1\rangle \\ dx=\varphi'(t)\,dt=\cos \end{array}\right.}$$

$x=\varphi(t)=\sin t$, $t=\arcsin x$, $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $x\in(-1,1)$. $\forall t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}): (\sin)'(t)=\cos t>0$.

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int\cos^2 t\,dt =$$

$$= \int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int\cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Tolik platí: $\sin 2t = 2\sin t \cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} =$

$$= 2x\sqrt{1-x^2}\,.$$

$\square$

Věta 13. (integrace „per partes").
Nechť funkce f a g mají vlastní derivace na intervalu J. Nechť F je primitivní funkcí k funkci $f'g$. Potom je funkce $G = f\cdot g - F$ primitivní k funkci $f\cdot g'$ na intervalu J, tj. platí na J:

$$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g\,.$$

Důkaz. Věta je v podstatě důsledkem věty o derivaci součinu funkcí. $\square$

Příklad 14. $\displaystyle\int x\cdot e^{-x}\,dx = \left|\begin{matrix} f(x)=x, & g'(x)=e^{-x} \\ f'(x)=1, & g(x)=-e^{-x}\end{matrix}\right| =$

$$= x\cdot(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx = -x e^{-x} + \int e^{-x}\,dx =$$

$$= -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(1+x) + C,\ x\in\mathbb{R}\,. \quad \square$$