3. Riemannův integrál

<u>Definice 1.</u> Mějme dán omezený uzavřený interval $\langle a,b\rangle$ a nechť $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Pak říkáme, že tyto body definují <u>dělení</u> <u>intervalu</u> $\langle a,b\rangle$ a body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nazýváme dělícími body dělení $\mathcal{D} := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Dále definujeme tzv. <u>normu dělení</u> $\mathcal{D}$ jako číslo:

$$\nu(\mathcal{D}) := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1\}.$$

<u>Definice Riemannova integrálu 2.</u>

Mějme dánu funkci $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) definovanou na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$. Je-li $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, kde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, pak budeme symbolem $N(\mathcal{D})$ označovat množinu všech n-tic $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ takových, že $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$.

Dále je-li $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in N(\mathcal{D})$, pak číslo

$$\sigma(f, \mathcal{D}, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazýváme Riemannovým integrálním součtem funkce f příslušným dělení $\mathcal{D}$ a n-tici „význačných bodů" $\xi \in N(\mathcal{D})$.

Číslo $A \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) se pak nazývá Riemannovým integrálem z funkce f přes interval $\langle a,b\rangle$ a budeme jej označovat symbolem

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \left(\text{nebo stručněji } \int_a^b f\right),$$

jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že pro každé dělení

$\mathcal{D}$ intervalu $\langle a,b\rangle$ takové, že $\nu(\mathcal{D})<\delta$ a pro každou n-tici vyznačených bodů $\xi\in\mathcal{N}(\mathcal{D})$ platí:

$$|\sigma(f,\mathcal{D},\xi)-A|<\varepsilon.$$

Definice 3. Nechť f je reálná funkce definovaná a omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$. Je-li $\mathcal{D}$ dělení s dělícími body $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, pak položme $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$:

$$m_i := \inf\{f(x): x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\},$$

$$M_i := \sup\{f(x): x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\}.$$

Dále pak definujeme:

$$s(f,\mathcal{D}) := \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i-x_{i-1}),$$

$$S(f,\mathcal{D}) := \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i-x_{i-1})$$

a čísla $s(f,\mathcal{D})$ a $S(f,\mathcal{D})$ nazýváme po řadě dolním (Darbouxovským) integrálním součtem k funkci f a horním (Darbouxovským) integrálním součtem k funkci f a k dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a,b\rangle$.

Lemma 4. Nechť f je reálná funkce, která je definovaná a omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$. Je-li pak $\mathcal{D}$ libovolné dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, $m=\inf\{f(x): x\in\langle a,b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x): x\in\langle a,b\rangle\}$, potom

$$m(b-a)\le s(f,\mathcal{D})\le S(f,\mathcal{D})\le M(b-a).$$

Důkaz. Domácí cvičení. $\square$

Definice 5. Nechť f je reálná funkce definovaná a omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$. Je-li pak

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\{S(f,\mathcal{D}): \mathcal{D} \text{ je nějaké dělení } \langle a,b\rangle\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\{s(f,D) : D \text{ je nějaké dělení } \langle a,b\rangle\}$$

potom čísla $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ (a které jsou korektně definována díky Lemmatu 4) nazýváme po řadě <u>horním (Darbouxovým) integrálem</u> resp. <u>dolním (Darbouxovým) integrálem</u>.

<u>Poznámka 6.</u> Z Lemmatu 4 plyne existence vlastních čísel $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ a $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

<u>Definice 7.</u> (<u>Darbouxova definice Riemannova integrálu</u>)

Nechť f je reálná funkce definovaná a omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$. Je-li pak dolní integrál roven hornímu integrálu, potom jejich společnou hodnotu nazveme Darbouxovým integrálem z funkce f přes interval $\langle a,b\rangle$ a píšeme:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Je-li $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$, kde $f = (\operatorname{Re} f) + i\cdot(\operatorname{Im} f)$, pak řekneme, že funkce f má Darbouxův integrál přes interval $\langle a,b\rangle$, mají-li reálné funkce $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ (reálná a imaginární složka funkce f) Darbouxův integrál přes interval $\langle a,b\rangle$ a klademe:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i\int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx.$$

Lemma 8. Je-li f reálná funkce definovaná a omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$, pak f má Darbouxův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, právě když $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ dělení D_ε intervalu $\langle a,b\rangle$ takové, že platí:

$$S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Důkaz. Viz. J. Kopáček, Matematika pro fyziky I, Lemma 6.4. $\square$

Poznámka 9. Je možné dokázat, že obě uvedené definice určitého integrálu, tj. definice Riemannova a Darbouxova určitého integrálu jsou ekvivalentní.

Příklady 10. a) Uvažujme konstantní funkci $f(x) = 2$, pro $x \in \langle a,b\rangle$, ~~kde~~ $a < b$. Je-li pak D libovolné dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, platí:

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= 2\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = 2\cdot(b-a).$$

Podobně se zjistí, že $S(f,D) = 2(b-a)$. Pak máme:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx =$$
$$= 2(b-a).$$

b) Uvažujme tzv. Dirichletovu funkci na int. $\langle a,b\rangle$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in Q \\ 0 & \text{pro } x \notin Q. \end{cases}$$

Je-li potom D libovolné dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, platí: $s(f,D) = 0$ a $S(f,D) = b-a$. Skutečně $\forall i$ je $m_i = 0$ a $M_i = 1$, tedy

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot(x_i - x_{i-1}) = 0,$$

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$
$$= b - a.$$

Odtud pak plyne, že

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(f,D) : D \text{ je dělení int. } \langle a,b\rangle\}$$
$$= 0,$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(f,D) : D \text{ je dělení int. } \langle a,b\rangle\}$$
$$= b - a.$$

To znamená, že $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \neq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ a

tedy f nemá integrál $\int_a^b f(x)\,dx$. □

Postačující podmínky existence Riemannova integrálu:

Věta 11. Je-li funkce f reálná nebo komplexní a spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, pak má Riemannův integrál od a do b $\int_a^b f(x)\,dx$.

Důkaz. Ověříme, že je splněna podmínka z Lemmatu 8 a nechť f je reálná funkce (komplexní případ je snadným důsledkem). Všimněme si, že ze spojitosti funkce f na $\langle a,b\rangle$ plyne její stejnoměrná spojitost na $\langle a,b\rangle$ díky Cantorově větě (viz. 1. kap., V. 14.) Zvolíme-li tedy $\varepsilon > 0$ libovolně, pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{\underbrace{b-a}_{>0}},$$

kdykoliv je $x', x'' \in \langle a, b\rangle$ a $|x' - x''| < \delta$. Nechť $\mathcal{D}_\varepsilon$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ je dělení takové, že $\nu(\mathcal{D}_\varepsilon) < \delta$. Z Weierstrassovy věty plyne, že $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ existují body $\xi_i, \eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ takové, že $m_i = \inf\limits_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) = f(\xi_i)$, a

$$M_i = \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) = f(\eta_i).$$

Pak zřejmě $\forall i \in \{1, \dots, n\}$: $|\xi_i - \eta_i| \leq (x_i - x_{i-1}) \leq \nu(\mathcal{D}_\varepsilon) < \delta$. Odtud máme:

$$M_i - m_i = f(\eta_i) - f(\xi_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tedy

$$S(f, \mathcal{D}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{D}_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \qquad \square$$

<u>Věta 12</u>. Nechť f je monotónní a omezená funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak má funkce f Riemannův integrál od a do b: $\int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Důkaz</u> V důkazu opět vyjdeme z Lemmatu 8. Pro určitost předpokládejme funkce f je na $\langle a, b\rangle$ neklesající a nechť $\mathcal{D}$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ s dělícími body: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Pak zřejmě pro každé $i = 1, \dots, n$ je $m_i = \inf\limits_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) =$

$= f(x_{i-1})$, $M_i = \sup\limits_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) = f(x_i)$. Tedy odtud

plyne: $S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)\,\nu(\mathcal{D}) =$$

$$= \nu(\mathcal{D}) \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) = \nu(\mathcal{D}) \left(f(b) - f(a) \right).$$

Je-li $\varepsilon > 0$ libovolné, pak za předpokladu, že f není na $\langle a,b\rangle$ konstantní položme $\delta := \varepsilon / (f(b) - f(a))$. Je-li pak $\mathcal{D}$ dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ takové, že $\nu(\mathcal{D}) < \delta$, potom platí:

$$S(f,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) \leq \nu(\mathcal{D}) (f(b) - f(a))$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon. \qquad \square$$

<u>Věta 13.</u> Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ se nezmění, změníme-li funkční hodnoty funkce f v konečném počtu bodů.

<u>Důkaz.</u> Viz. J. Kopáček, Matematika pro fyziky I, věta 6.13). $\square$

Podstata věty 13 je takováto: máme-li dvě funkce $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $g: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ a množina $M = \{x \in \langle a,b\rangle : f(x) \neq g(x)\}$ je konečná, pak integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje právě když existuje integrál $\int_a^b g(x)\,dx$ a pak platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

<u>Definice 14.</u> Podmnožina $N \subset \mathbb{R}$ se nazývá Lebesgueovskou nulovou množinou nebo podmnožinou míry nuly (v Lebesgueově smyslu), existuje-li $\forall \varepsilon > 0$ posloupnost otevřených intervalů $\langle I_k \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ tak, že

$$N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon, \text{ kde } |I_k|$$

označuje délku intervalu I_k, $k = 1,2,3,\dots$

Domácí úkol 15. a) ~~Je~~ Ukažte, že jakákoli konečná množina v $\mathbb{R}$ je podmnožinou míry nula.
b) Ukažte, že jsou-li $N_1, N_2, \ldots, N_k$ podmnožiny míry nula, pak i množina

$$N = \bigcup_{i=1}^{k} N_i \,,$$

je podmnožinou míry nula.
c) Ukažte, že je-li $\langle N_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ posloupnost množin míry nula, pak i množina

$$N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$$

je podmnožinou míry nula.
d) Ukažte, že je-li $N \subset \mathbb{R}$ podmnožina míry nula a $N' \subset N$, pak i množina N' je podmnožina míry nula.
d) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ukažte, že interval $\langle a, b \rangle$ není podmnožinou míry nula.

Věta 16 (**Lebesgueovo kritérium**).
Nechť f je omezená funkce na intervalu $\langle a,b \rangle$. Potom Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje, právě když je funkce f skoro všude spojitá na $\langle a,b \rangle$, což znamená, že existuje podmnožina míry nula N taková, že funkce f je spojitá v každém bodě $x \in \langle a,b \rangle \setminus N$.
Důkaz. Provádět nebudeme. $\square$

Poznámky 17. a) Tedy věta 11 je zřejmým důsledkem věty 16.
b) Věta 12 je též důsledkem Lebesgueova kritéria (V. 16). Stačí si uvědomit, že monotónní funkce na $\langle a,b \rangle$

má na intervalu $\langle a,b\rangle$ nejvýše spočetnou množinu bodů nespojitosti a jak plyne z domácího úkolu 15 výše, že každá nejvýše spočetná množina je podmnožina míry nula.

c) Je dokonce možné sestrojit omezenou funkci $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ takovou, že její množina bodů nespojitosti je nespočetná a přesto existuje Riemannův integrál

$$\int_a^b f(x)\,dx .$$

(Pak to znamená, že množina bodů nespojitosti funkce f je nespočetná a zároveň je podmnožinou míry nula.)

Domácí úkol 18. Uvažujme tzv. Riemannovu funkci $R(x)$ definovanou na nějakém intervalu $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$ předpisem:

$$R(x) := \begin{cases} 1/n, & \text{jestliže } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{m}{n},\ m \text{ a } n \text{ jsou nesoudělné;} \\ 0, & \text{jestliže } x \notin \mathbb{Q} \vee x = 0. \end{cases}$$

a) Ukažte, že funkce $R(x)$ je spojitá v bodě x, právě když $x \notin \mathbb{Q}$.

b) Z části a) a z Lebesgueova kritéria odvoďte, že Riemannova funkce $R(x)$ má na $\langle a,b\rangle$ Riemannův integrál.

Označení 19. Označme symbolem $R(\langle a,b\rangle)$ množinu všech funkcí ~~maj~~ f mající na $\langle a,b\rangle$ Riemannův integrál.

Věta 20. Nechť $f, g \in R(\langle a,b\rangle)$. Pak platí:

1) $(f+g) \in R(\langle a,b\rangle)$ a
$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$: $(\alpha \cdot f) \in R(\langle a,b\rangle)$ a
$$\int_a^b (\alpha \cdot f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

3) $|f| \in R(\langle a,b\rangle)$ a
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Důkaz. Ad a) b):
Nechť $f, g \in R(\langle a,b\rangle)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Pak lze dokázat snadno, že pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a,b\rangle$ a pro každé $\xi \in N(\mathcal{D})$ platí pro Riemannovy integrální součty:
$$\left.\begin{aligned} &\sigma(\alpha f + \beta g; \mathcal{D}, \xi) = \\ &\quad = \alpha\,\sigma(f; \mathcal{D}, \xi) + \beta \cdot \sigma(g; \mathcal{D}; \xi). \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Z $(*)$ dostáváme limitním přechodem pro $\nu(\mathcal{D}) \to 0$:
$$\int_a^b (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x)\,dx = \lim_{\substack{\nu(\mathcal{D})\to 0 \\ \xi \in N(\mathcal{D})}} \sigma(\alpha \cdot f + \beta \cdot g; \mathcal{D}, \xi) =$$

$$\overset{(?)}{=} \alpha \cdot \lim_{\substack{\nu(\mathcal{D})\to 0 \\ \xi \in N(\mathcal{D})}} \sigma(f; \mathcal{D}, \xi) + \beta \cdot \lim_{\substack{\nu(\mathcal{D})\to 0 \\ \xi \in N(\mathcal{D})}} \sigma(g; \mathcal{D}; \xi) =$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

ad c) Dokažme nejdříve implikaci:

$$f \in R(\langle a,b\rangle) \Rightarrow |f| \in R(\langle a,b\rangle),$$ kde f je reálná funkce def. na $\langle a,b\rangle$. (Případ, kdy f je komplexní funkcí viz. DÚ.)

Zvolme lib. $\varepsilon > 0$. Z předpokladu $f \in R(\langle a,b\rangle)$ a z Lemmatu 8 plyne existence dělení D_ε intervalu $\langle a,b\rangle$ tak, že

$$S(f;D_\varepsilon) - s(f;D_\varepsilon) < \varepsilon. \qquad (*)$$

Dále nechť J_i označuje i-tý dělící interval dělení D_ε. Pak zřejmě $\forall x,y \in J_i : |f(x)| - |f(y)| \leq \leq |f(x) - f(y)| \leq \sup_{J_i} f - \inf_{J_i} f$. Odtud pak vyplývá, že

$$\sup_{J_i} |f| - \inf_{J_i} |f| \leq \sup_{J_i} f - \inf_{J_i} f. \quad (**)$$

Opravdu, zvolíme-li $\alpha > 0$ libovolně, pak z definice suprema a infima plyne existence bodů $x_\alpha, y_\alpha \in J_i$ tak, že $\sup_{J_i} |f| - \frac{\alpha}{2} < |f(x_\alpha)|$,

$$\inf_{J_i} |f| + \frac{\alpha}{2} > |f(y_\alpha)|.$$

Odtud plyne: $\left(\sup_{J_i} |f| - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(\inf_{J_i} |f| + \frac{\alpha}{2}\right) =$

$$= \sup_{J_i} |f| - \inf_{J_i} |f| - \alpha < |f(x_\alpha)| - |f(y_\alpha)| \leq$$

$$\leq \sup_{J_i} f - \inf_{J_i} f \Rightarrow \forall \alpha > 0 :$$

$$\sup_{J_i} |f| - \inf_{J_i} |f| < \sup_{J_i} f - \inf_{J_i} f + \alpha.$$

Odtud pak limitním přechodem pro $\alpha \to 0+$ dostaneme:

$$\sup_{J_i} |f| - \inf_{J_i} |f| \leq \sup_{J_i} f - \inf_{J_i} f. \quad (**)$$

Pak dostáváme:

$$S(|f|;D_\varepsilon)-s(|f|;D_\varepsilon)=\sum_i(\sup_{J_i}|f|-\inf_{J_i}|f|)(x_i-x_{i-1})$$

$$\leq \sum_i(\sup_{J_i} f-\inf_{J_i} f)(x_i-x_{i-1})= S(f;D_\varepsilon)-s(f;D_\varepsilon)$$

$$<\varepsilon.$$

Z lemmatu 8 pak plyne, že $|f|\in R(\langle a,b\rangle)$.

Nyní položme $A=\int_a^b f(x)dx$, $B=\int_a^b|f(x)|dx$ a zvolme $\varepsilon>0$ libovolně. Pak z Riemannovy definice integrálu plyne existence $\delta>0$ tak, že pro každé dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ takové, že $\nu(D)<\delta$ a pro každé $\xi\in N(D)$ platí:

$$|\sigma(f,D,\xi)-A|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\sigma(|f|,D,\xi)-B|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud pak dostaneme:

$$|A|<|\sigma(f,D,\xi)|+\frac{\varepsilon}{2}\leq\sigma(|f|,D,\xi)+\frac{\varepsilon}{2}<$$

$$<B+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=B+\varepsilon.$$

Takto jsme dokázali, že $\forall\varepsilon>0: |A|<B+\varepsilon$.
Pak limitním přechodem pro $\varepsilon\to0+$ dostaneme, že $|A|\leq B$, tj. že

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx. \quad \square$$

Domácí úkol 21. a) Předpokládejme, že $f, g \in R(\langle a,b\rangle)$. Ukažte, že pak také $f \cdot g \in R(\langle a,b\rangle)$.
Návod: Nejdříve dokažte, že platí: $f \in R(\langle a,b\rangle) \Rightarrow f^2 \in R(\langle a,b\rangle)$. Pak použijte identitu:

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right].$$

b) Nechť f je komplexní funkce a $f \in R(\langle a,b\rangle)$. Dokažte, že pak $|f| \in R(\langle a,b\rangle)$. Viz. důkaz věty 20 c).

c) Předpokládejme, že $f : \langle a,b\rangle \to \langle c,d\rangle$, $f \in R(\langle a,b\rangle)$. Dále nechť $g : \langle c,d\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na $\langle c,d\rangle$. Ukažte, že pak $g \circ f \in R(\langle a,b\rangle)$.
Návod: Použijte Lebesgueovo kritérium integrability (věta 16). ~~Pak~~

Věta 22. Nechť $f \in R(\langle a,b\rangle)$ a $\langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$. Pak též $f \in R(\langle c,d\rangle)$.
Důkaz. Neuvádíme. □

Věta 23. Nechť $-\infty < a < c < b < \infty$ a $f \in R(\langle a,c\rangle)$, $f \in R(\langle c,b\rangle)$. Pak také $f \in R(\langle a,b\rangle)$ a platí:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Důkaz. Neuvádíme. □

Definice 24. Pro libovolnou funkci f, $a \in \mathbb{R}$ definujme

$$\int_a^a f(x)dx := 0.$$

Dále je-li $b < a$ a $f \in R(\langle b,a\rangle)$, pak definujeme:

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx.$$

Věta 25. Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $f \in R(\langle\alpha, \beta\rangle)$, kde $\alpha = \min\{a, b, c\}$, $\beta = \max\{a, b, c\}$. Potom platí:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

Dále $\forall a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx ,$$

pokud alespoň jeden z uvedených integrálů existuje.

Důkaz. Pokud je $a < c < b$, pak je první část tvrzení důsledkem vět 22 a 23. Rozborem dalších případů vzájemné polohy bodů a, b, c dostaneme důkaz pro obecný případ. Druhá část tvrzení je bezprostředním důsledkem definice 24. $\square$

Lemma 26. Nechť $f, g, h \in R(\langle a, b\rangle)$ jsou tři reálné funkce. Pak

1) je-li $h \geq 0$ na $\langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b h(x)dx \geq 0$;

2) je-li $f \leq g$ na $\langle a, b\rangle$, pak

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx ;$$

3) je-li $M = \sup_{x \in \langle a, b\rangle} f(x)$, pak

$$\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Důkaz. 1) Předpokládejme, že $h \geq 0$ na $\langle a, b\rangle$ a nechť D je dělení definované dělicími body:

$$a_0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Pak $\forall i = 1, \ldots, n$ je $0 \leq m_i = \inf\{f(x) : x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$.

Pak $0 \leq s(h, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \underline{\int_a^b} h(x)dx =$

$= \int_a^b h(x)dx.$

2) Zde stačí položit $h = g - f$ a aplikovat tvrzení z bodu 1) na funkci h.
3) Je-li $M = \sup_{\langle a,b\rangle} f$, pak $f \leq M$ na $\langle a,b\rangle$ a tedy podle bodu 2) je: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M\cdot(b-a)$. $\square$

<u>Věta 27</u> (O <u>integrálu s proměnnou horní mezí</u>).
Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť fce $f: J \to \mathbb{R}$ má Riemannův integrál na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ kdykoliv $\langle \alpha, \beta \rangle \subset J$. Je-li pak $c \in J$ libovolný pevný bod, potom funkce

$$F_c(x) := \int_c^x f(t)dt, \quad x \in J$$

má tyto vlastnosti:
1) F_c je na J spojitá;
2) je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in J$, pak $F_c'(x_0) = f(x_0)$;
3) pro libovolné body $c_1, c_2 \in J$ je $F_{c_1}(x) - F_{c_2}(x) \equiv \equiv \text{konst.} = \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx, \ x \in J$.

<u>Důkaz.</u> 1) Buď $x', x'' \in J$, pak $|F_c(x') - F_c(x'')| =$

$$= \left| \int_c^{x'} f(t)dt - \int_c^{x''} f(t)dt \right| \overset{\text{Věta 25}}{=} \left| \int_{x''}^{x'} f(t)dt \right|,$$ kde všechny

uvedené integrály existují podle předpokladu. Dále z věty 23 a lemmatu 26 (3) plyne:

$$\left| \int_{x''}^{x'} f(t)dt \right| \leq \int_{x''}^{x'} |f(t)|dt \leq M\cdot|x''-x'|,$$ kde

~~$M = \sup |f|$~~ $M = \sup\{|f(t)| : t \in I\}$, kde I je

interval jehož koncovými body jsou body x' a x''.
Poznamenejme, že podle předpokladu věty je $f \in R(I)$ a odtud pak plyne omezenost funkce f na intervalu I. Tedy dokázali jsme, že funkce f je na intervalu J Lipschitzovská a pak je tím spíše spojitou funkcí na J.

2) Předpokládejme, že x_0 není pravým koncovým bodem intervalu J. Případ, kdy x_0 není levým koncovým bodem intervalu J se vyšetřuje podobně.

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že $\langle x_0, x_0+\delta) \subset J$ a $\forall t \in \langle x_0, x_0+\delta)$:

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Je-li nyní $h \in (0, \delta)$, pak máme:

$$\left| \frac{F_c(x_0+h) - F_c(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \left\{ \int_c^{x_0+h} f(t)dt - \int_c^{x_0} f(t)dt \right\} - f(x_0) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h} \left\{ \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)h \right\} \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\, dt \right|$$

$$\leqq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt \leqq \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h = \varepsilon.$$

Tedy $(F_c)'_+(x_0) = f(x_0)$.

3) Toto tvrzení je důsledkem věty 25. □

<u>Věta 28</u> (<u>existence primitivní funkce</u>).
Nechť funkce f je spojitá na intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Pak f má na intervalu J primitivní funkci. Pro dané $c \in J$ je primitivní funkce, která je v bodě c rovna nule dána předpisem:

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt. \qquad (NI)$$

<u>Důkaz</u>. Věta je důsledkem věty 27. □

Věta 29 (Newton-Leibnizův vzorec).
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a F je primitivní funkcí na $\langle a,b\rangle$, pak
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b := F(b)-F(a).$$

Důkaz. Věta je opět důsledkem věty 27. □

Příklad 30. Najděme Riemannův integrál $\int_0^2 e^x dx$ s pomocí Newton-Leibnizova vzorce:
$$\int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1.$$

Poznámka 31. Funkce F_c definovaná předpisem (NI) bývá nazývána často neurčitým integrálem funkce f (na J). V důkazu věty 27 (1) jsme ukázali, že neurčitý integrál F_c je na intervalu J Lipschitzovskou funkcí a tudíž stejnoměrně spojitou funkcí. Tedy splňuje silnější podmínku než podmínku spojitosti na intervalu J. Dále kombinací Lebesgueova kritéria (věta 16) a věty 27 dostáváme následující zajímavé tvrzení:

Je-li funkce f definovaná na intervalu $\langle a,b\rangle$, $f\in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a F je neurčitý integrál daný předpisem (NI), pak pro skoro všechna $x\in\langle a,b\rangle$ platí:
$$F'(x) = f(x).$$

Jinými slovy: existuje podmnožina nulové míry $N \subset \langle a,b\rangle$ tak, že $\forall x\in\langle a,b\rangle \setminus N: \exists F'(x)$, a $F'(x)=f(x)$.

Newton-Leibnizův vzorec (věta 29) lze například zobecnit následujícím způsobem:

Je-li funkce f definovaná na intervalu $\langle a,b\rangle$ a

$f \in R(\langle a,b\rangle)$. Dále, má-li funkce f na intervalu (a,b) primitivní funkci F, která je spojitou funkcí na int. $\langle a,b\rangle$, pak platí Newton-Leibnizův vzorec:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).} \qquad (N\text{-}L)$$

Předpoklad $f \in R(\langle a,b\rangle)$ v předchozím tvrzení je podstatný. Existují totiž příklady funkcí $F: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in \langle a,b\rangle\ \exists F'(x) \in \mathbb{R}$ ale $F' \notin R(\langle a,b\rangle)$. (dokonce i v případě, že F' je omezenou funkcí na $\langle a,b\rangle$.)

Příklad 32. Ať $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle -1, 0\rangle \\ 1+x^3 & \text{pro } x \in (0,1\rangle. \end{cases}$

Spočtěme Riemannův integrál:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

Jelikož je funkce f na intervalu $\langle -1,1\rangle$ omezenou funkcí a je spojitá všude s výjimkou bodu $x=0$, je $f \in R(\langle -1,1\rangle)$. Podle Věty 23 je:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{1} (1+x^3)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[x + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}.$$

Poznamenejme, že k výpočtu obou dílčích integrálů jsme použili Newton-Leibnizův vzorec (Věta 29). Nicméně zúžení funkce f na interval $\langle 0,1\rangle$ není v bodě $x=0$ spojitá zprava. Ovšem pokud předefinujeme funkční hodnotu funkce f v bodě $x=0$ dostaneme funkci $\tilde{f}: \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, def. předpisem $\tilde{f}(x) = 1+x^3$ a která je na $\langle 0,1\rangle$ spojitá a platí:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \tilde{f}(x)\,dx. \quad \text{(Viz. Věta 13).}$$

Věta 33 (integrace „per partes").
Nechť f, f', g, g' jsou spojité funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \big[f(x)\,g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Důkaz. Ze spojitosti funkce $f'\cdot g$ na $\langle a,b\rangle$ plyne existence primitivní funkce F k funkci $f'\cdot g$ na int. $\langle a,b\rangle$. Pak jak víme je funkce $G = f\cdot g - F$ primitivní funkcí k funkci $f\cdot g'$, viz. Věta 13 v kap. 2. Nyní dle Newton-Leibnizova vzorce je

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = \big[G(x)\big]_a^b = \big[f(x)\,g(x) - F(x)\big]_a^b =$$

$$= \big[f(x)\,g(x)\big]_a^b - \big[F(x)\big]_a^b = \big[f(x)\,g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$$

□

Věta 34 (První věta o substituci pro urč. integrál).
Nechť funkce φ má na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ spojitou derivaci a funkce f nechť je spojitá na $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)$. Potom platí:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (S1)$$

Důkaz. Ze spojitosti plyne existence obou integrálů v (S1). Je-li dále F primitivní funkcí k funkci f na intervalu $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)$, pak z věty 9 ve 2. kap. plyne, že $F\circ\varphi$ je primitivní funkcí k funkci $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$. Z Newton-Leibnizova vzorce plyne:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \big[F\circ\varphi\big]_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

□

Věta 35 (Druhá věta o substituci v urč. integrálu). Nechť funkce φ má na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ spojitou derivaci; φ je ryze monotónní funkcí na $\langle\alpha,\beta\rangle$, $A := \varphi(\alpha)$, $B := \varphi(\beta)$. Je-li funkce f na intervalu $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)$ jehož koncovými body jsou body A, B spojitá, pak platí:

$$\int_A^B f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(A)}^{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\,. \qquad (S2)$$

Důkaz. Podotkněme, že díky spojitosti existují integrály na obou stranách rovnosti (S2). Dále je zřejmé, že pro intervaly $I = \langle\alpha,\beta\rangle$ a $J = \varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)$ jsou splněny předpoklady věty 11 z 2. kapitoly. Nejdříve předpokládejme, že funkce φ je na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ rostoucí. Pak $J = \varphi(\langle\alpha,\beta\rangle) = \langle\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\rangle = \langle A,B\rangle$. Nechť G označuje primitivní funkci k funkci $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ na intervalu ~~I~~ $\langle\alpha,\beta\rangle$. Pak v důsledku věty 11 (2. kapitoly) je pak funkce $G\circ\varphi^{-1}$ primitivní funkcí k funkci f na intervalu $\langle A,B\rangle$. Pak z Newton-Leibnizova vzorce (N-L) vyplývá, že

$$\int_A^B f(x)\,dx \overset{(N-L)}{=} \underset{\beta=\varphi^{-1}(B)}{\left[G\circ\varphi^{-1}\right]_A^B} = G(\varphi^{-1}(B)) - G(\varphi^{-1}(A)) =$$

$$\overset{(N-L)}{=} \int_{\alpha=\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\,.$$

Je-li funkce φ na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ klesající, pak $J = \varphi(\langle\alpha,\beta\rangle) = \langle\varphi(\beta), \varphi(\alpha)\rangle = \langle B, A\rangle$. Pak podobně jako výše dostaneme:

$$\int_B^A f(x)\,dx \overset{(N-L)}{=} \underset{\alpha=\varphi^{-1}(A)}{\left[G\circ\varphi^{-1}\right]_B^A} = G(\varphi^{-1}(A)) - \underset{\beta=\varphi^{-1}(B)}{G(\varphi^{-1}(B))} =$$

$$\overset{(N-L)}{=} \int_{\beta=\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = -\int_{\alpha=\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\,.$$

Odtud plyne:

$$\int_A^B f(x)\,dx = -\int_B^A f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(A)}^{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt. \quad \square$$

Poznamenejme, že věty 33, 34 a 35 lze zobecnit jak naznačuje poznámka 31.

<u>Věta 36.</u> (<u>První věta o střední hodnotě integrálního počtu</u>).
Nechť $f, g \in R(\langle a,b\rangle)$, $g(x) \geq 0$, $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$ pro nějaké konstanty $m, M \in \mathbb{R}$.
Potom platí:

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (*)$$

Dále existuje číslo $\mu \in \langle m, M\rangle$ tak, že platí:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (**)$$

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, pak existuje číslo $\xi \in \langle a,b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (***)$$

<u>Důkaz.</u> Z předpokladu je zřejmé, že $f\cdot g \in R(\langle a,b\rangle)$, $m\cdot g \in R(\langle a,b\rangle)$, $M\cdot g \in R(\langle a,b\rangle)$. Dále z monotónnosti R-integrálu a z linearity R-integrálu (viz. Věta 20, Lemma 26) plyne:

$$m\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b m\,g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq \int_a^b M\,g(x)\,dx = $$
$$= M\int_a^b g(x)\,dx.$$ Tak jsme dokázali $(*)$.

Dokažme nyní vztah (**). Je zřejmé, že je-li $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, pak vztah (**) platí pro libovolné $\mu \in \langle m, M\rangle$. Je-li $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, pak stačí položit

$$\mu := \int_a^b f(x)g(x)\,dx \Big/ \int_a^b g(x)\,dx .$$

Odtud již snadno roznásobením obdržíme (**).

Je-li funkce f navíc spojitou funkcí na $\langle a,b\rangle$, pak z věty o mezihodnotě plyne existence čísla $\xi \in \langle a,b\rangle$ takového, že $f(\xi)=\mu$. Dosadíme-li tedy za μ do vztahu (**) $f(\xi)$, obdržíme vztah (***). $\square$

<u>Důsledek 37.</u> Je-li $f \in R(\langle a,b\rangle)$ a je-li konstanta $K \geq 0$ taková, že $\forall x \in \langle a,b\rangle$ platí: $|f(x)| \leq K$, potom

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq K\cdot(b-a).$$

<u>Důkaz.</u> Z věty 30 (3) vyplývá, že

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq K\int_a^b dx = K\cdot(b-a).$$

Jinak: $\forall x \in \langle a,b\rangle: \quad -K \leq f(x) \leq K \overset{g(x)=1}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow -K\int_a^b 1\cdot dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq K\int_a^b 1\cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -K(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq K\cdot(b-a) \Rightarrow$$

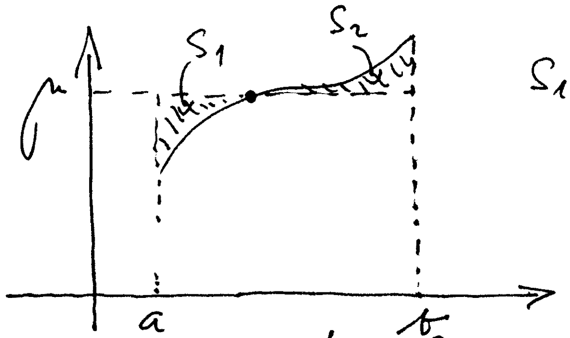
$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq K(b-a). \quad \square$$

Příklad 38. Dokažme:
$$0 \leqq \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^2}}\,dx \leqq 0{,}05.$$

Důkaz. První nerovnost je důsledkem monotónnosti R-integrálu a toho, že $\forall x \in \langle 0,1\rangle : \dfrac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^2}} \geq 0$.

Abychom dokázali druhou nerovnost, položme ve větě 36,
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}, \quad g(x) = x^{19}.$$
Pak $\forall x \in \langle 0,1\rangle : 0 < \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} \leqq 1$ a $x^{19} \geq 0$. Tedy $m=0$ a $M=1$. Z věty 36 pak dostáváme:
$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^2}}\,dx \leqq \int_0^1 x^{19}\,dx = \left[\frac{x^{20}}{20}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{20} = 0{,}05. \quad \square$$

Poznámka 39. Nechť je ve větě 36 $g \equiv 1$ na $\langle a,b\rangle$, pak $\exists \mu \in \langle m, M\rangle$ tak, že
$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu \cdot (b-a) \quad \text{(viz. obr.)}$$



$S_1 = S_2$ Číslo μ někdy nazýváme **střední hodnotou funkce f na $\langle a,b\rangle$**.

Domácí úkol 40! Prostudujte ve skriptech Matematika pro fyziky I od J. Kopáčka odstavce 6.13 a 6.14 o zobecněném R-integrálu a o aplikacích R-integrálu v geometrii.