

Zopakujeme si tvrzení, kterému obvykle říkáme "řetězové pravidlo":

uvažujeme dvě zobrazení $F: V \rightarrow W$, $G: W \rightarrow X$, kde V, W a X jsou konečné-rozměrné vektorové prostory. Dále předpokládáme, že $a \in \text{int}(D_F)$, $F(a) \in \text{int}(D_G)$, $\exists dF_a, dG_{F(a)}$.

Potom existuje totální diferenciál složeného zobrazení $G \circ F$ v bodě a , $d(G \circ F)_a$. Navíc platí vztah:

$$d(G \circ F)_a = dG_{F(a)} \circ dF_a. \quad (1)$$

Je dobré si uvědomit, že uvedený vztah má svůj základ v následující úvaze:

Je-li zobrazení $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ diferencovatelné, pak

$$\varepsilon(h) = \frac{F(a+h) - F(a) - dF_a(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$$

pro $h \rightarrow 0$. Tedy pro $\|h\| < \varepsilon_0$ je možné psát:

$$\Delta F_a(h) := F(a+h) - F(a) \approx dF_a(h).$$

Nyní položíme $H = G \circ F$ a ukážeme,

$$\Delta H_a(h) \approx dG_{F(a)}(dF_a(h)).$$

Sčítáním, lze to už psát následující:

$$\Delta H_a(h) = H(a+h) - H(a) = G(F(a+h)) - G(F(a)) = G(F(a) + [F(a+h) - F(a)]) - G(F(a)) = \Delta G_{F(a)}(F(a+h) - F(a)) \approx dG_{F(a)}(\Delta F_a(h)) \approx dG_{F(a)}(dF_a(h)).$$

Konečně, Jacobův matic $(G \circ F)'(a)$ lze vyjádřit takto:

$$(G \circ F)'(a) = G'(F(a)) \cdot F'(a). \quad (2)$$

Zde na pravé straně máme součin Jacobův matic zobrazení G v bodě $F(a)$ a Jacobův matic zobrazení F v bodě a .

Příklad 1. Uvažujeme případ kdy

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R},$$

$h = g \circ f$. Adaptujeme nyní vztah (2) na tento speciální případ.

Je-li tedy f diferencovatelné zobrazení v bodě $t \in \mathbb{R}$, pak pokud $f'_1(t), \dots, f'_m(t)$ jsou komponentami zobrazení f , pak má Jacobův matic tvar:

$$f'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_m(t))^T =$$

$$= \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_m(t) \end{pmatrix}.$$

Dále pro Jacobův matic $g'(f(t))$ platí:

$$g'(f(t)) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t)), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(t)) \right).$$

Podle vztahu (2) máme:

položme-li $h = g \circ f$, pak

$$h'(t) = (g \circ f)'(t) =$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t)), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(t)) \right) \cdot \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_m(t) \end{pmatrix}.$$

Poslední vztah lze též psát takto:

$$h'(t) = (g \circ f)'(t) = \langle \nabla g(f(t)), f'(t) \rangle \quad (3)$$

pokud identifikujeme jednotně-díkovou maticí $g'(f(t))$ s gradientem $\nabla g(f(t))$

a pokud identifikujeme jednorámcovou maticí $f'(t)$ s m -rozměrným vektorem $(f'_1(t), \dots, f'_m(t))^T \in \mathbb{R}^m$.

Vztah (3) je zobrazením vztah pro výpočet smířné derivace:

$$D_v g(a) = \langle \nabla g(a), v \rangle.$$

(Vysvětlíme!)

Vztah (3) lze též psát v tomto tvaru:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x_1} \cdot \frac{df_1}{dt} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \cdot \frac{df_2}{dt} + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_m} \cdot \frac{df_m}{dt}.$$

Pokud dále položíme $x_i = f_i(t)$, $i=1, \dots, m$

a $u = g(x)$, pak předchozí vztah zapíšeme takto:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_m} \cdot \frac{dx_m}{dt}.$$

Příklad 2. Uvažujeme nyní případ, kdy máme dvě zobrazení $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Dále uvažujeme složené zobrazení $H = G \circ F$. Najdeme nyní vyjádření Jacobův matic $H'(a)$ pomocí parciálních derivací zobrazení F a G . Nechť $F = (F_1, F_2, F_3)$ a $G = (G_1, G_2)$.

Řetězové pravidlo nám dává:

$$H'(a) = \begin{pmatrix} D_1 H_1(a) & D_2 H_1(a) \\ D_1 H_2(a) & D_2 H_2(a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_1 G_1(F(a)) & D_2 G_1(F(a)) & D_3 G_1(F(a)) \\ D_1 G_2(F(a)) & D_2 G_2(F(a)) & D_3 G_2(F(a)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 F_1(a) & D_2 F_1(a) \\ D_1 F_2(a) & D_2 F_2(a) \\ D_1 F_3(a) & D_2 F_3(a) \end{pmatrix}.$$

Pokud zavedeme označení proměnných takto:

$$u = u(x, y, z) = G_1(x, y, z),$$

$$v = v(x, y, z) = G_2(x, y, z),$$

$$x = x(s, t) = F_1(s, t),$$

$$y = y(s, t) = F_2(s, t),$$

$$z = z(s, t) = F_3(s, t),$$

potom máme vyjádření parciálních derivací $\frac{\partial u}{\partial s}$ a $\frac{\partial v}{\partial s}$ s pomocí výše uvedeného výpočtu Jacobův matic $H'(a)$:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = D_1 H(s, t) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_2 H(s, t) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}.$$

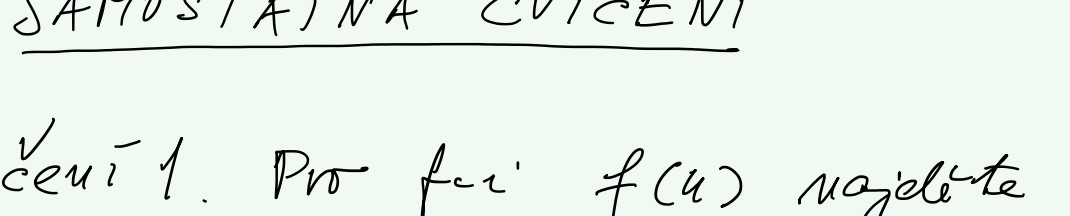
Vzhledem k tomu vyjádřit parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial s}$ a $\frac{\partial v}{\partial s}$ (provedli jsme!)

Příklad 3 (transformace do polárních souřadnic).

Uvažujeme zobrazení $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované svým komponentami:

$$x = T_1(r, \varphi) = r \cos \varphi,$$

$$y = T_2(r, \varphi) = r \sin \varphi.$$



Dále uvažujeme reálnou fci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

danou předpisem: $z = f(x, y)$.

Nyní definujeme $g = f \circ T$, pak

$$z = g(r, \varphi) = f(T(r, \varphi)) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Vyjádříme nyní s pomocí řetězového pravidla parciální derivace $\frac{\partial g}{\partial r}$ a $\frac{\partial g}{\partial \varphi}$:

$$g'(r, \varphi) = \left(\frac{\partial g}{\partial r} \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Tedy plyne:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \varphi.$$

SAMOSTATNÁ CVIČENÍ

Cvičení 1. Pro fci $f(u)$ najděte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$, jestliže

a) $u = x^2 + e^y$; b) $u = \sqrt{x^2 + xy^2}$;

c) $u = (\sin^2 3x)(\cos^2 2y)$.

Zde předpokládáme, že fci $f(u)$ je diferencovatelná v daném bodě u a že je známá derivace $f'(u)$.

Řešení: a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot f'(u)$; $\frac{\partial f}{\partial y} = e^y \cdot f'(u)$.

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2}{3\sqrt{x^2 + xy^2}} \cdot f'(u)$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{3\sqrt{x^2 + xy^2}} \cdot f'(u)$.

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \sin 6x \cos^2 2y \cdot f'(u)$;

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3 \sin^2 3x \sin 4y \cos 2y \cdot f'(u).$$

Cvičení 2. Pro funkci $f(u, v)$ najděte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, jestliže

a) $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$;

b) $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$;

c) $u = x \cos y$, $v = x \sin y$.

Zde předpokládáme, že funkce $f(u, v)$ je diferencovatelná v daném bodě (u, v) a že jsou známy parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Řešení: a) $\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial v}$;

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial u} + y e^{xy} \frac{\partial f}{\partial v}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \frac{\partial f}{\partial u} + x e^{xy} \frac{\partial f}{\partial v}$.

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y \frac{\partial f}{\partial u} + \sin y \frac{\partial f}{\partial v}$;

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y \frac{\partial f}{\partial u} + x \cos y \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Cvičení 3. Najděte totální diferenciál $d\varphi(x, y)$, jestliže

a) $\varphi = g \circ f$, známe-li derivaci $g'(u)$ a pokud $u = f(x, y) = xy + \frac{y^2}{x}$;

b) $\varphi = g \circ f$, známe-li $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ a pokud:

$$(u, v) = f(x, y) = \left(\frac{y}{x+y}, x^2 y \right).$$

Řešení: a) $d\varphi_{(x, y)} = g'(u) \cdot \left(y - \frac{y^2}{x^2} \right) dx + g'(u) \cdot \left(x + \frac{2y}{x} \right) dy$.

b) $d\varphi_{(x, y)} = \left(2x \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{y}{x+y} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dx +$

$$+ \left(\frac{x}{x+y} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - 3y^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dy.$$