

4. Totální diferenciál-výpočet

neděle 25. října 2020

15:04

Příklady: Vyšetříme diferencovatelnost dané fce $z = f(x, y)$ v daném bodě $a = (x_0, y_0)$. V kladném případě stanovíme totální diferenciál df_a .

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{jestliže } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{jestliže } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

$a = (0, 0)$.

b) $f(x, y) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) + y^2, & \text{jestliže } x \neq 0 \\ y^2, & \text{jestliže } x = 0, \end{cases}$

$a = (0, 0)$.

c) $f(x, y) = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3, a = (0, 0)$.

d) $f(x, y) = xy^2, a = (1, 3)$.

Řešení:

1) Dvěma nejdříve nutnou podmínkou diferencovatelnosti fce $z = f(x, y)$ v bodě a : "je-li fce f diferencovatelná v bodě a , potom je v bodě a spojitá."

Z předpisu funkce $f(x, y)$ plyne, pokud položíme $y = x \neq 0$:

$$f(x, y) = f(x, x) = \frac{2x^2 \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{2x^3}{x^2(x + x)} =$$

$$= \frac{2}{x + x}. \text{ Tedy } \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) =$$

$$= 0.$$

$$y = x^2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$f(x, y) = f(x, x^2) = \frac{2x^2 \cdot x^2}{x^2 + x^4} = \frac{2x^4}{2x^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = 1.$$

Tedy odtud plyne, že neexistuje limita:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

neboť se liší relativně linearitě:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ a } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y).$$

$$y = x \quad y = x^2$$

Pak ovšem fce $f(x, y)$ nemá v počátku $a = (0, 0)$ spjatou funkci a tedy nemá úplnou nutnou podmínku diferencovatelnosti.

f) (i) Ukážeme, že je daná fce spojitá v počátku $a = (0, 0)$.

Z předpisu funkce plyne, že $f(0, 0) = 0$.

Dále vyvíjíme následující odhad:

$$|\sin x| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{tedy } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2:$$

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y)| =$$

$$= \begin{cases} |x^3 \sin \frac{1}{x} + y^2|, & x \neq 0 \\ |y^2|, & x = 0 \end{cases} \leq$$

$$\leq \begin{cases} |x|^3 \cdot |\sin \frac{1}{x}| + y^2, & \text{je-li } x \neq 0 \\ y^2, & \text{je-li } x = 0 \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} |x|^3 \cdot \frac{1}{|x|} + y^2, & \text{je-li } x \neq 0 \\ y^2, & \text{je-li } x = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{je-li } x \neq 0 \\ y^2, & \text{je-li } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Pak tedy máme } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2:$$

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y)| \leq x^2 + y^2.$$

Je-li pak $\varepsilon > 0$ libovolně zvoleno, pak pro

$\delta = \sqrt{\varepsilon}$ o máme, že pokud je splněna

podmínka: $d((x, y), (0, 0)) < \delta$, potom

$$\varepsilon = \delta^2 > d^2((x, y), (0, 0)) = (\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2})^2 =$$

$$= x^2 + y^2.$$

Dále odtud plyne, že

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq x^2 + y^2 < \varepsilon,$$

jestliže $d((x, y), (0, 0)) < \delta$. Tedy, dokázali

jsme spojitost fce f v bodě $a = (0, 0)$.

(ii) Najdeme parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Určíme předpis „průřezové funkce“ $g_{\underline{e}_1}(t)$:

$$g_{\underline{e}_1}(t) = f(a + t \cdot \underline{e}_1) = f(0, 0) + t \cdot (1, 0) =$$

$$= f(t, 0) = \begin{cases} t^3 \sin(\frac{1}{t}), & \text{je-li } t \neq 0 \\ 0, & \text{je-li } t = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow g'_{\underline{e}_1}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \sin(\frac{1}{t}) - 0}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{t \cdot \sin(\frac{1}{t})}_{\substack{\text{omezená fce} \\ \text{na okolí } t=0}} = 0.$$

$$g_{\underline{e}_2}(t) = f((0, 0) + t(0, 1)) = f(0, t) = t^2 \Rightarrow$$

$$g'_{\underline{e}_2}(0) = [t^2]'_{t=0} = 2t|_{t=0} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = g'_{\underline{e}_1}(0) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = g'_{\underline{e}_2}(0) =$$

$$= 0.$$

(iii) Ukážeme, že fce $f(x, y)$ je diferencovatelná v bodě $a = (0, 0)$, tj. existuje totální diferenciál $df_{(0,0)}$.

Také víme, jestliže existuje tot. diferenciál

df_a spadá má tvar lineární kombinace

elementárních lineárních forem dx a dy :

$$df_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a) dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^2:$$

$$df_{(0,0)}(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) v_2$$

$$= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = 0,$$

$$(v = (v_1, v_2)).$$

Dvěma nyní platnost podmínek:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(a+v) - f(a) - df_a(v)}{\|v\|} = 0.$$

V našem případě máme pro $v \neq (0, 0)$:

$$\left| \frac{f(a+v) - f(0, 0) - df_a(v)}{\|v\|} \right| =$$

$$= \left| \frac{f((0, 0) + (v_1, v_2)) - f(0, 0) - 0 \cdot v_1 - 0 \cdot v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{f(v_1, v_2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right| = \begin{cases} \frac{v_1^3 \sin(\frac{1}{v_1}) + v_2^2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, & \text{je-li } v_1 \neq 0 \\ |v_2^2 / \sqrt{v_1^2 + v_2^2}|, & \text{je-li } v_1 = 0. \end{cases}$$

$$\leq \frac{v_1^2 + v_2^2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \rightarrow 0 \text{ pro}$$

$$d((x, y), (0, 0)) \rightarrow 0$$

$$(= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}!).$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + v) - f(0, 0) - df_{(0,0)}(v)}{\|v\|} = 0.$$

Takto jsme „z definice“ dokázali

diferencovatelnost fce $z = f(x, y)$.

$$c) f(x, y) = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3, a = (0, 0).$$

Ř: Fce $f(x, y)$ je spojitá fce na $\mathbb{R}^2$.

Ukážeme, že $\forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^2$:

$$f(t \cdot v) = t \cdot f(v).$$

Tedy pro $v = (v_1, v_2)$ platí:

$$f(t \cdot v) = f(t(v_1, v_2)) = f(t v_1, t v_2) =$$

$$= (\sqrt[3]{t v_1} + \sqrt[3]{t v_2})^3 = t (\sqrt[3]{v_1} + \sqrt[3]{v_2})^3$$

$$= t \cdot f(v). \text{ Odtud plyne } \forall v \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}:$$

$$g_v(t) = f((0, 0) + t \cdot v) = f(t \cdot v) = t \cdot f(v)$$

$$\Rightarrow D_v f(0, 0) = f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

$$\text{Například: } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = D_{(1,0)} f(0, 0) = f(1, 0)$$

$$= (\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{0})^3 = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = D_{(0,1)} f(0, 0) = f(0, 1) = (\sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{1})^3$$

$$= 1;$$

$$D_{(1,1)} f(0, 0) = f(1, 1) = (\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1})^3 = 8.$$

Dále ověříme následující nutnou podmínku

diferencovatelnosti:

„Je-li fce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pak $\forall v \in \mathbb{R}^n$ existuje směrová derivace $D_v f(a)$ a platí:

$$D_v f(a) = df_a(v).”$$

$$\text{Dále víme, že pak } df_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a) dx +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(a) dy. \text{ Tedy vyplývá, že pak}$$

$$\text{protože } (1, 1) = (1, 0) + (0, 1), \text{ musí}$$

platit:

$$8 = D_{(1,1)} f(0, 0) = df_{(0,0)}((1, 1)) = df_{(0,0)}((1, 0) + (0, 1))$$

$$= df_{(0,0)}((1, 0)) + df_{(0,0)}((0, 1)) = D_{(1,0)} f(0, 0) +$$

$$+ D_{(0,1)} f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) =$$

$$= 1 + 1 = 2 \Rightarrow 8 = 2 \text{ což je spor s}$$

tím, že je funkce f diferencovatelná v bodě $(0, 0)$!

$$d) z = f(x, y) = xy^2, a = (1, 3).$$

Vypočítáme obě parciální derivace v

okresním bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) =$$

$$= 2xy. \text{ Obě fce } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ jsou spojitémi}$$

funkcemi na $\mathbb{R}^2$. Také vyvíjíme následující

podmínku:

„pokud má fce $z = f(x, y)$ obě parciální

derivace na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^2$ a

necht' jsou v bodě a spojití. Pak je

funkce f v bodě a diferencovatelná.“

Odtud již vyplývá diferencovatelnost

fce f v každém bodě $a \in \mathbb{R}^2$.