L5_Vypocet_parc_der_vys_radu

úterý 3. listopadu 2020 9:47

A) Výpočet parciálních derivací vyššího řádu:

1) Najděte parciální derivace fce $z = f(x,y)$ druhého pořádku v obecném bodě (x,y), jestliže:

(i) $f(x,y) = xy(x^3 + y^3 - 3)$; (ii) $f(x,y) = e^{xy}$; (iii) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$; (iv) $f(x,y) = x^y$.

[Výsledky: (i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4(x^3+y^3) - 3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12xy^2$; (ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1+xy)e^{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$; (iii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$, $xy \neq 1$; (iv) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x)x^{y-1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x$.]

2) Vypočítejte parciální derivace druhého řádu funkce $z = f(x,y)$ v daném bodě $a \in \mathbb{R}^2$, jestliže:

(i) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$, $a = (1,0)$; (ii) $f(x,y) = y^2(1-e^x)$, $a = (0,1)$;

(iii) $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$, $a = (0,1)$; (iv) $f(x,y) = y \sin\left(\frac{y}{x}\right)$, $a = (2,\pi)$;

(v) $f(x,y) = \cos(xy - \cos y)$, $a = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

[Výsledky: (i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = 2$; (ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = 0$; (iii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = -1$; (iv) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = -\frac{\pi^3}{16}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\pi^2}{8}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = -\frac{\pi}{4}$; (v) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = -\frac{\pi^2}{4}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = -1$.]

3) Zjistěte, zdali existují parciální derivace druhého řádu fce $z = f(x,y)$ v bodě $a = (0,0)$, jestliže

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{jestliže } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jestliže } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

[Výsledky: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$, smíšené derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ neexistují.]

4) Vypočítejte smíšené parciální derivace 2. řádu $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, jestliže

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{jestliže } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jestliže } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

[Výsledky: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.]