

1. Poznámky a doplňky

středa 7. října 2020

12:01

Poznámky a doplňky k 1. kap.

Poznámky k těmto spojitost zobrazením

Cvičení: Uvažujme M.P. (M,d), $x \in M$.

Uvažujme funkci $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem: $f(x) = d(x_0, x)$ je spojitým zobrazením ve smyslu naší definice.

Ře:

Uvažujme v $\mathbb{R}$ otevřenou množinu $V \subset \mathbb{R}$. Například ukaž, že $\varepsilon > 0$ a $V = (0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$. Jak vypadá množina $f^{-1}(V) = f^{-1}((0, \varepsilon))$?

$$x \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow f(x) \in V = (0, \varepsilon) \Leftrightarrow 0 < d(x_0, x) < \varepsilon.$$

$$\text{Tedy: } f^{-1}((0, \varepsilon)) = \{x \in M : 0 < d(x_0, x) < \varepsilon\} = B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}.$$

Lemma. Buď (M,d) M.P. a ukaž, že $x_0 \in U$ kde $U \subset M$ je o.n. (M,d) otevřenou množinou. Potom je množina $\dot{U} = U \setminus \{x_0\}$ o.n. (M,d) otevřenou množinou.

Důkaz. Zvolme lib. bod $x \in \dot{U}$ a ukaž, že $\varepsilon = d(x, x_0)$. Pak zřejmě $\varepsilon > 0$. Dále z otevřenosti množiny množiny U vyplývá, že n. $\delta > 0$ takové, že $B(x, \delta) \subset U$.

Bůho předp. je $\delta < \varepsilon$. Potom $x_0 \notin B(x, \delta)$ a tudíž $B(x, \delta) \subset \dot{U}$. Z výše uvedeného lemmatu tedy vyplývá, že $f^{-1}((0, \varepsilon)) = B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ je o.n. (M,d) otevřenou množinou.

Nyní např. ukaž, že $V = (-\varepsilon, 0)$. Pak $f^{-1}(V) = f^{-1}((-\varepsilon, 0)) = \{x \in M : -\varepsilon < d(x_0, x) < 0\} = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(V)$ je o.n. (M,d) otevřenou množinou.

Nechť $V = (x, \beta) \subset \mathbb{R}$. Pak tudíž, že $f^{-1}(V)$ je o.n. (M,d) otevřenou množinou (důkaz 1).

Lemma. Každou otevřenou množinu V v M.P. (R,de) lze de je nahradit od abs. hodnoty kx vyjádřit jako sjednocení otevřených intervalů.

Důkaz. Je-li $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, pak $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Tedy $B(x, \varepsilon)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}$.

Je-li $V \subset \mathbb{R}$ o.n. (R,de) otevřenou množinou, pak $\forall x \in V$ $\exists \varepsilon > 0$: $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset V$. Tedy pak plyne tvrzení lemmatu. $\square$

Lemma. Necht X, Y jsou množiny a $f: X \rightarrow Y$. Dále ukaž, že $Y = \{y_i : i \in I\}$ je systém podmnožin množiny Y , tj. $\forall i \in I: y_i \subset Y$. Pak platí: $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} y_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(y_i)$.

Některé předchozích dvou lemmat dostaneme tvrdit. cvičení. $\square$

Ad Cvičení: Uvažujme fci $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem: $f(x) = \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Dokažme spojitost funkce jako zobrazení euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ do eukl. prostoru $\mathbb{R}$.

Rěšení: Nejdříve si všimneme faktoru, že $\forall x \in \mathbb{R}^n$ a $\forall r > 0$:

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}.$$

Nyní uvažujme libovolnou otevřenou množinu $V \subset \mathbb{R}$. Je-li $V = (a, b) \subset \mathbb{R}$, pak $f^{-1}(V) = \{x \in \mathbb{R}^n : a < \|x\| < b\}$. Ukažme nyní, že množina $f^{-1}(V)$ je o.n. $\mathbb{R}^n$ otevřenou množinou. Necht tedy $x_0 \in f^{-1}(V)$.

To znamená, že $a < \|x_0\| < b$. Je-li nyní, $\varepsilon > 0$ a $y \in \mathbb{R}^n$ takové, že $y \in B(x_0, \varepsilon)$, potom platí: $\|x_0 - y\| < \varepsilon$. Dále máme:

$$\|y\| = \|(y - x_0) + x_0\| \leq \|y - x_0\| + \|x_0\| < \varepsilon + \|x_0\|.$$

Na druhé straně platí: $\|y\| = \|(y - x_0) + x_0\| \geq \|x_0\| - \|y - x_0\| > \|x_0\| - \varepsilon$.

Tedy platí: $\|x_0\| - \varepsilon < \|y\| < \|x_0\| + \varepsilon$. (*) Nyní vyberme $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo: $\varepsilon < \min(\|x_0\| - a, b - \|x_0\|)$. Pak z (*) vyplývá, že

$$b < \|x_0\| - \varepsilon < \|y\| < \|x_0\| + \varepsilon < a.$$

Ukázali jsme tudíž, že $B(x_0, \varepsilon) \subset f^{-1}(V)$.

Nyní uvažujme obecný případ, kdy V nemusí být otevřeným intervalem. Podle výše uvedeného lemmatu lze otevřenou množinu V vyjádřit jako sjednocení otevřených intervalů, tedy $V = \bigcup_{j \in J} I_j$, kde $\forall j \in J$ je I_j otevřeným intervalem v $\mathbb{R}$. Pak lze psát:

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} I_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(I_j).$$

Jak již víme, tak $\forall j \in J$ je $f^{-1}(I_j)$ o.n. $\mathbb{R}^n$ otevřenou množinou. Konečně protože sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřenou množinou, vyplývá z věty (*) otevřenost množiny $f^{-1}(V)$ neboť jsme je vyjádřili jako sjednocení otevřených množin $f^{-1}(I_j)$, $j \in J$. $\square$

Komentář k předchozímu cvičení: a) Během důkazu v předchozím cvičení jsme využili kv. nejmenšíkovou nerovnost pro normu $\|x\|$ vektoru $x \in \mathbb{R}^n$. Platí totiž $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Tuto nerovnost lze odvodit z kv. Cauchy-Swarzovy nerovnosti:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

b) Dále jsme užívali základní vlastnost otevřených množin, která platí obecně v každém metrickém prostoru:

Sjednocení libovolného systému otevřených množin je opět otevřenou množinou.

Je-li (M,d) metrický prostor a jestliže $\{V_i : i \in I\}$ tvoří systém o.n. (M,d) otevřených množin, pak je sjednocení $\bigcup_{i \in I} V_i$ též o.n. (M,d) otevřenou množinou.

Někdy se hodí v důkazech spojitosti zobkázat následující lemma.

Lemma. Uvažujme tři metrické prostory (M,d), (N,e) a (P,f). Dále ukaž, že $F: M \rightarrow N$, $G: N \rightarrow P$ a necht jsou obě zobrazení spojitá. Pak je složené zobrazení $G \circ F: M \rightarrow P$ spojitým zobrazením.

Důkaz. Necht $V \subset P$ je libovolná otevřená množina v M.P. (P,f). Pak ke spojitosti zobrazení G plyne, že množina $W = G^{-1}(V)$ je otevřenou množinou v M.P. (N,e). Dále ke spojitosti vnitřního zobrazení F vyplývá, že $U = F^{-1}(W)$ je otevřenou množinou v M.P. (M,d). Tvrzení lemmatu pak plyne z faktu: $U = F^{-1}(W) = F^{-1}(G^{-1}(V)) = (G \circ F)^{-1}(V)$. $\square$

Konvergentní posloupnosti v M.P.

Definice. Mějme daný metr. prostor (M,d) a posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ bodů prostoru M. Řekneme, že tato posloupnost

konverguje v M k limitě $x \in M$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n > n_2$ platí:

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Pak píšeme: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nebo $x_n \rightarrow x$ pro $n \rightarrow \infty$.

Definice. Mějme daný metr. prostor (M,d) a posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ bodů prostoru M. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme Cauchyovskou (nebo fundamentální), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $m > n_2, n > n_2$ platí:

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Cvičení 1. Dokažte, že každá konvergentní posloupnost v metr. prostoru (M,d) je Cauchyovská.

Důkaz (o konvergenzi v $\mathbb{R}^k$). Uvažujme euklidovský prostor $\mathbb{R}^k$ a posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^k$ bodů prostoru $\mathbb{R}^k$. Dále $\forall m \in \mathbb{N}$ označme komponenty vektoru x_m jako $x_m^1, x_m^2, \dots, x_m^k$. Tedy $\forall m \in \mathbb{N}$ je $x_m = (x_m^1, x_m^2, \dots, x_m^k) \in \mathbb{R}^k$.

Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k$, právě když $\forall i=1, \dots, k: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = x^i$.

(Tedy konvergence v prostoru $\mathbb{R}^k$ je ekvivalentní s konvergenzí po souřadnicích!)

Důkaz. Předpokládáme, že pro každé $i=1, 2, \dots, k$ existuje $x^i \in \mathbb{R}$ takové, že $x^i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i$.

Ukažme, že potom platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x := (x^1, x^2, \dots, x^k)$.

Na tím účelem zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Pak $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ existuje přirozené číslo $n_i \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|x_n^i - x^i| < \varepsilon / \sqrt{k}, \text{ když } n > n_i.$$

Nyní položíme $n_0 = \max(n_1, \dots, n_k)$ a předpokládáme, že $n \in \mathbb{N}$ a $n > n_0$. Pak $n > n_i \forall i \in \{1, \dots, k\}$ a tudíž máme:

$$|x_n^i - x^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}.$$

Pak odhád plyne pro $x = (x^1, \dots, x^k)$, $n > n_0$:

$$d(x_n, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_n^i - x^i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\right)^2} = \sqrt{k \cdot \frac{\varepsilon^2}{k}} = \varepsilon.$$

Cvičení 2. Dokažte předchozí důkaz a dokažte opačnou implikaci. To znamená, že z konvergence $x_n \rightarrow x$ v prostoru $\mathbb{R}^k$ plyne konvergence komponent $x_n^i \rightarrow x^i, \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

Cvičení 3. (Jednoznačnost limity posl.) Ukažte, že je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů v metrickém prostoru (M,d) a platí-li: $l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ a $l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, potom $l_1 = l_2$.

Definice. Řekneme, že metr. prostor (M,d) je úplným metrickým prostorem pokud je každá Cauchyovská posloupnost v tomto prostoru konvergentní posloupností.

Cvičení 4. Hledejte příklady metr. prostorů, které jsou úplnými metrickými prostory a příklady metr. prostorů, které nejsou úplnými metr. prostory!

Cvičení 5. (Test uzavřenosti množiny). Uvažujme metr. prostor (M,d) a necht $A \subset M$.

(i) Je-li A uzavřenou množinou v M a je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ posl. konvergující k bodu $x \in M$, potom $x \in A$.