

1. Topologie Euklidovského prostoru

neděle 27. září 2020

15:18

Cvičení 1 Uvažujme metrický prostor (M, d) a lib. množinu $A \subset M$. Symbolem $\text{Int}(A)$ označme tzv. **vnitřek množiny A** :

$\text{Int}(A) =$ „sjednocení všech otevřených množin $\emptyset$ takových, že $\emptyset \subset A$ “
 $= \bigcup \{ \emptyset : \emptyset \subset A \wedge \emptyset \text{ je otevřenou množinou v } (M, d) \}$.

Tedy jinak řečeno, $x \in \text{Int}(A)$ právě když existuje otevřená množina $\emptyset$ v M.P. (M, d) taková, že $x \in \emptyset$ a $\emptyset \subset A$.

Dokažte následující tvrzení:

a) $\text{Int}(A)$ je v (M, d) otevřenou množinou pro každou podmnožinu $A \subset M$.

b) $\text{Int}(M) = M$.

c) $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$ pro každé dvě podmnožiny $A \subset M$, $B \subset M$.

d) $\text{Int}(A) \subset A$ pro každou podmnožinu $A \subset M$.

e) $\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A)$ pro každou podmnožinu $A \subset M$.

Cvičení 2. Uvažujme metrický prostor (M, d) a podmnožinu $A \subset M$. Nyní definujeme tzv. **uzavřenou množinu A** jako množinu

$\bar{A} =$ „průnik všech uzavřených podmnožin množiny A “ =

$= \bigcap \{ F : F \text{ je uzavřenou množinou v } (M, d) \text{ a } A \subset F \}$.

Tedy $\forall x \in M$: $x \in \bar{A}$ právě když $\exists$ podmnožiny $A \subset F$ a $\exists$ toho že F je v (M, d) uzavřenou množinou plyne, že $x \in F$.

Dokažte, že platí následující tvrzení:

(a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ pro každé dvě podmnožiny $A \subset M$, $B \subset M$.

(c) $A \subset \bar{A}$ pro každou podmnožinu $A \subset M$.

(d) $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$ pro každou podmnožinu $A \subset M$.

Cvičení 3. Vyjděte z definice spojitosti zobrazení a ukažte, že je-li (M, d) metrický prostor a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ je reálná funkce na M , pak pokud pro každý otevřený interval $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ je úplný obraz $f^{-1}((\alpha, \beta))$ otevřenou množinou v (M, d) , potom je f spojitým zobrazením M.P. (M, d) do M.P. $(\mathbb{R}, e)$, kde $e(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Cvičení 4. Dokažte, že je funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x, y) = x^2 + y^2$ spojitým zobrazením M.P. $\mathbb{R}^2$ do M.P. $\mathbb{R}$. (Na $\mathbb{R}^2$ uvažujme Euklidovskou metriku a stejně tak na $\mathbb{R}$ uvažujme standardní metriku odvozenou od absolutní hodnoty.)