Příklady na limity funkcí více proměnných

1) Najděte a) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} u$; b) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} u$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u$; jestliže

(i) $u = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

Řešení: Nejdříve stanovíme definiční obor:

$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2y^2+(x-y)^2 \neq 0\}$, kde

$x^2y^2+(x-y)^2 = 0 \iff (x^2y^2 = 0 \wedge (x-y)^2 = 0) \iff$

$\iff \{[(x=0)\vee(y=0)]\wedge(x=y)\} \iff x=y=0$.

Tedy $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow (0,0)\in(D_f)'$.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} u \overset{x\neq 0}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$;

b) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} u \overset{y\neq 0}{=} \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$;

c) Spočtěme nyní tři „relativní limity" $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E_i}} u$,

kde postupně $E_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0\}$,

$E_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$, $E_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}$.

Zřejmě $\forall i = 1,2,3$ je $(0,0)\in E_i'$. Pak

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in E_1} u = \lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in E_2} u = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in E_3} u = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^2x^2+(x-x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1.$$

Protože nám vyšly tyto relativní limity různé, pak výchozí limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u$ (tedy limita vzhledem k celému definičnímu oboru funkce $u = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$) neexistuje. $\square$

(ii) $u = x + y \sin \frac{1}{x}$.

<u>Řešení</u>: Najdeme definiční obor $\mathcal{D}_f$ funkce $u = f(x,y)$:

$\mathcal{D}_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Tedy zřejmě $(0,0)$ je hromadným bodem definičního oboru $\mathcal{D}_f$.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} u \overset{x\neq 0}{=} \lim\limits_{x\to 0} \left(\lim\limits_{y\to 0} \left(x + y \sin \frac{1}{x}\right)\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0} x = 0.$

b) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} u \overset{y\neq 0}{=} \lim\limits_{y\to 0} \left(\lim\limits_{x\to 0} \left(x + y \sin \frac{1}{x}\right)\right)$;

Ukažme nyní, že limita $\lim\limits_{x\to 0} \left(x + y \sin\frac{1}{x}\right)$ neexistuje kdykoliv $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$. K důkazu neexistence limity využijeme Heineovu větu.
Za tím účelem uvažujme dvě posloupnosti $\langle x_k \rangle_{k\in N}$ a

$\langle z_k \rangle_{k\in\mathbb{N}}$ dané předpisem: $x_k = \frac{1}{k\pi}$, $z_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, kde $k=1,2,3,\dots$; pak $\forall k\in\mathbb{N}$ je $x_k\neq 0$, $z_k\neq 0$, $x_k\to 0$, $z_k\to 0$ pro $k\to\infty$. Dále pak máme $\forall y\in\mathbb{R}$, $y\neq 0$:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k,y) = \lim_{k\to\infty}\left(x_k + y\sin\frac{1}{x_k}\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k\pi} + y\underbrace{\sin(k\pi)}_{\overset{\|}{0}}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k\pi} = 0;$$

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k,y) = \lim_{k\to\infty}\left(z_k + y\sin\frac{1}{z_k}\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi} + y\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}+y\right) =$$

$$= y \neq 0.$$

Tedy to odporuje díky Heineově větě existenci limity $\lim_{x\to 0}\left(x + y\sin\frac{1}{x}\right)$ kdykoliv je $y\neq 0$. Potom neexistuje tudíž ani dvojnásobná limita $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} u$.

c) Všimněme si, že $\forall (x,y)\in D_f$ platí:

$$0 \leqq \left|x + y\sin\frac{1}{x}\right| \leqq |x| + |y|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqq |x| + |y|.$$

Jelikož zřejmě $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|) = 0$, platí:

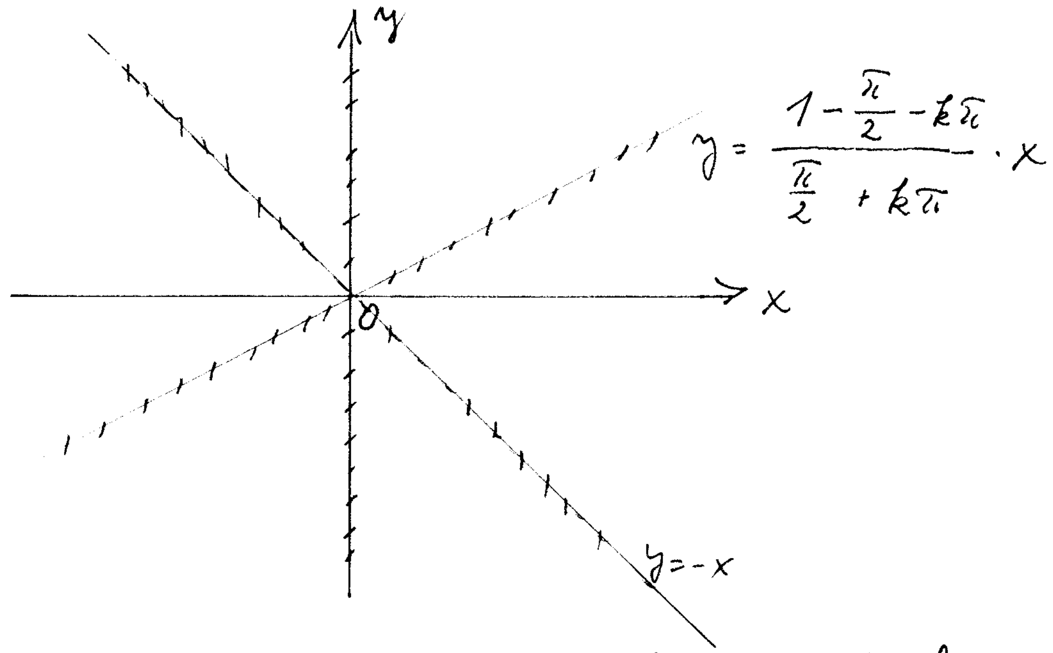
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x + y\sin\frac{1}{x}\right) = 0. \quad \square$$

(iii) $u = \frac{y}{x}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{x+y}$.

<u>Řešení</u>: $D_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0,\ x+y\neq 0,\ \frac{x}{x+y}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Bod (x,y) tedy leží v definičním oboru, neleží-li na některé z přímek majících rovnice:

$$x = 0,\quad y = -x,\quad y = \frac{1-\frac{\pi}{2}-k\pi}{\frac{\pi}{2}+k\pi}\,x,\ \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$



Odtud snadno plyne, že počátek $(0,0)$ je hromadným bodem definičního oboru funkce $u = f(x,y)$.

a) $$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} u \overset{x\neq0}{=} \lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{y}{x}\operatorname{tg}\frac{x}{x+y}\right) = \lim_{x\to0}\frac{0}{x}\operatorname{tg}\frac{x}{x+0} = \lim_{x\to0} 0 = 0.$$

b) $$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} u \overset{y\neq0}{=} \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{y}{x}}_{\downarrow\ \pm\infty}\operatorname{tg}\underbrace{\frac{x}{x+y}}_{\downarrow\ 0}\right)\overset{(*)}{=}\lim_{y\to0}1=1.$$

(*) K výpočtu limity uvnitř závorky použijeme l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to0}\frac{y}{x}\operatorname{tg}\frac{x}{x+y}\overset{y\neq0}{=} y\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{x+y}}{x}\ \text{„}\tfrac{0}{0}\text{"}\ \overset{l'H}{=}$$

$$\overset{l'H}{=} y\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{x+y}\right)}\cdot\frac{(x+y)-x}{(x+y)^2}}{1} = y\lim_{x\to0}\overset{\nearrow 1}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{x+y}\right)}}\cdot\overset{\nearrow 1/y}{\frac{y}{(x+y)^2}} = 1.$$

c) Počítejme dvojnou limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x} \operatorname{tg} \frac{x}{x+y}$.

Uvažujme $\forall k \in R$ takové, že $k \neq -1$, $k \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$ množinu $E(k) = \{(x,y) \in R^2 : y = kx, x \neq 0\}$. Pak $E(k) \subset D_f$ a pro každé takové k je $(0,0) \in E_k'$.

Vypočtěme pak pro $k \neq -1, \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$ relativní limity $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in E(k)} u$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in E(k)} u = \lim_{(x,kx)\to(0,0)} f(x,kx) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{kx}{x} \operatorname{tg} \frac{x}{x+kx} \right) = \lim_{x\to 0} k \operatorname{tg} \frac{1}{1+k} = k \operatorname{tg} \frac{1}{1+k}.$$

Je tedy zřejmé, že hodnota relativní limity závisí na volbě k. Odtud pak vyplývá neexistence dvojné limity.

2) Najděte dvojnou limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

<u>Řešení</u>: Je-li $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$, pak definičním oborem této funkce bude množina $D_f = R^2 \setminus \{(0,0)\}$. Tedy počátek je hromadným bodem D_f. Zvolíme-li nyní $\varepsilon > 0$ libovolně, pak pro každý bod (x,y) z prstencového okolí počátku $\mathring{B}((0,0);\delta) \setminus \{(0,0)\}$ (kde $\delta := \varepsilon$) platí: $\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$

a pak také platí:

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{x^2}{x^2+y^2} |y| \leqq |y| \leqq \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon.$$

Tedy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$. $\square$

3) Najděte dvojnou limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, je-li

$$f(x,y) = y \cos \frac{1}{y-x}.$$

<u>Řešení</u>: Určeme nejdříve definiční obor:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}.$$

Odtud snadno plyne, že počátek je hromadným bodem D_f. Zvolme nyní $\varepsilon > 0$ a položme $\delta := \varepsilon > 0$. Pak $\forall (x,y) \in D_f \cap \left(\mathring{B}((0,0);\delta) \setminus \{(0,0)\}\right)$ platí:

$$\left| y \cos \frac{1}{y-x} - 0 \right| = |y| \left| \cos \frac{1}{y-x} \right| \leqq |y| \leqq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon.$$

Tedy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y \cos \frac{1}{y-x} = 0.$ $\square$

4) Najděte dvojnou limitu funkce $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{y^2+x^4}$ v bodě $(0,0)$.

<u>Řešení</u>: $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Nyní pro libovolná $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$ uvažujme množinu:

$E(\alpha,\beta) = \{(\alpha t, \beta t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$. Pak zřejmě $E(\alpha,\beta) \subset D_f$ a počátek $(0,0)$ je hromadným bodem D_f. Nyní počítejme relativní limitu:

$$L(\alpha,\beta) = \lim_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in E(\alpha,\beta)} \frac{x^2 y}{y^2+x^4}, \text{ kde } \alpha,\beta \in \mathbb{R},$$

$\alpha^2+\beta^2 \neq 0$. Pak

$$L(\alpha,\beta) = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha^2 \beta t}{\beta^2+\alpha^4 t^2} = 0, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \alpha^2+\beta^2 \neq 0.$$

Dále uvažujme množinu $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, x \neq 0\}$. Pak opět $E \subset D_f$ a počítejme relativní limitu:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in E} f(x,y) = \lim_{(x,x^2)\to(0,0)} f(x,x^2) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot x^2}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Jelikož relativní limity vzhledem k množinám $E(\alpha,\beta)$ a E vycházejí různé, nemůže pak existovat výchozí dvojná limita (tj. limita vzhledem k $\mathcal{D}f$). $\square$