# ELEMENTÁRNÍ METODY ŘEŠENÍ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

## Pojem obyčejné diferenciální rovnice a jejího řešení.

Nechť $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$. Potom rovnice

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

se nazývá obyčejnou diferenciální rovnicí řádu $n$ pro neznámou funkci $y(x)$.

Řádem dif. rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace neznámé funkce, která se rovnici vyskytuje.

Příklad. Rovnice $y''' - 2xy'' + 6y = 0$ je obyčejnou diferenciální rovnicí 3. řádu pro neznámou funkci $y(x)$.

Poznámka. Někdy je možné rovnici (1) psát ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \qquad (2)$$

kde $f: G \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

Definice řešení. Řešením rovnice (1) resp. (2) rozumíme jakoukoli funkci $h(x)$, která má na jistém intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ derivace až do řádu $n$ a platí:

$$(x, h(x), \dots, h^{(n)}(x)) \in \Omega,$$

$$F(x, h(x), \dots, h^{(n)}(x)) = 0,$$

$\forall x \in I$, resp.

$$(x, h(x), \dots, h^{(n-1)}(x)) \in G,$$

$$h^{(n)}(x) = f(x, h(x), \dots, h^{(n-1)}(x)),$$

$\forall x \in I$.

<u>Definice</u>. Nechť je dáno $n+1$ reálných čísel $x_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ tak, že $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in G$. <u>Cauchyovou počáteční úlohou pro rovnici</u> (2) rozumíme úlohu nalézt takové řešení $y(x)$ rovnice (2), které vyhovuje tzv. počátečním podmínkám:

$$x_0 \in I, \; y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Dále budeme zkoumat obyčejnou dif. rovnici 1. řádu:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3}$$

resp. obyčejnou dif. rovnici 1. řádu rozřešenou vzhledem k derivaci $y'$:

$$y' = f(x, y), \tag{4}$$

kde $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, resp. $f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

<u>Věta o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy počáteční úlohy.</u>

Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitou na množině $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak každým bodem $(x_0, y_0) \in G$ prochází aspoň jedno řešení $h(x)$ diferenciální rovnice (4) definované na nějakém intervalu $I$ obsahujícím bod $x_0$ a splňující podmínku: $h(x_0) = y_0$. Má-li navíc funkce $f(x,y)$ v $G$ omezenou parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}$, pak ke každé dvojici čísel $(x_0, y_0) \in G$ existuje právě jedno řešení $h(x)$ dif. rovnice (4), definované v jistém největším intervalu $I$ obsahujícím bod $x_0$ a splňující podmínku : $h(x_0) = y_0$. Každé jiné řešení $g(x)$ splňující podmínku $g(x_0) = y_0$ je pak částí tohoto řešení. To znamená, že existuje okolí $U$ bodu $x_0$ takové, že $U \subseteq I$ tak, že $h|_U = g$.

<u>Příklad</u>. Ukažme, že daným bodem může procházet i více řešení. Uvažujme diferenciální rovnici :

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}.$$

Pak funkce $f(x,y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ je v $\mathbb{R}^2$ spojitá a tudíž každým bodem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ prochází alespoň jedno řešení podle předchozí věty. Nyní nechť $(x_0, y_0) = (0,0)$. Pak tímto bodem zřejmě prochází triviální řešení $y_1 = 0$. Navíc tímto bodem prochází též řešení $y_2 = x^3$. Skutečně, $y_2'(x) = 3x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Na druhé straně $3 \cdot y_2^{\frac{2}{3}}(x) = 3\,(x^3)^{\frac{2}{3}} = 3x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Navíc $y_2(0) = 0^3 = 0$.

Všimněme si, že na libovolně malém okolí bodu $(0,0)$ není parciální derivace :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3y^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

omezenou funkcí. Tudíž není v počátku splněna podmínka zaručující jednoznačnost řešení dané rovnice. V tomto případě neexistuje okolí $U$ bodu $0$ tak, aby $y_1|_U = y_2|_U$.

Definice. Nechť $y_1(x)$ je řešením rovnice (3) resp. (4) definované na intervalu $I_1$. Řešení $y(x)$ def. na intervalu $I$ se nazve prodloužením řešení $y_1(x)$, je-li $I_1 \subseteq I$ a $y|_{I_1} = y_1$. Je-li navíc $I_1 \neq I$, pak se řešení $y(x)$ nazývá vlastním prodloužením řešení $y_1(x)$.

Řešení, ke kterému neexistuje vlastní prodloužení se pak nazývá úplným (nebo maximálním) řešením.

Definice. Říkáme, že funkce $f(x,y)$ splňuje v bodě $(x_0,y_0) \in G$ Lipschitzovu podmínku, jestliže existuje okolí $U$ bodu $(x_0,y_0)$ a konstanta $K>0$ tak, že

$\forall (x,y_1) \in U,\ \forall (x,y_2) \in U$ :

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq K\,|y_1 - y_2|.$$

(Přesněji řečeno funkce $f(x,y)$ splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné $y$.)

Poznámka. Je možné snadno dokázat aplikací věty o střední hodnotě, že je-li parciální derivace $\partial f/\partial y$ na nějakém okolí $U$ bodu $(x_0,y_0)$ omezená, pak f-ce $f(x,y)$ splňuje Lipschitzovu podmínku v bodě $(x_0,y_0)$.

Věta o existenci a jednoznačnosti:
Nechť je funkce $f(x,y)$ spojitá na $G \subseteq \mathbb{R}^2$ a v každém bodě množiny $G$ nechť splňuje Lipschitzovu podmínku. Pak každým bodem $(x_0,y_0) \in G$ prochází právě jedno řešení $y(x)$ diferenciální rovnice (4) definované na nějakém intervalu $I$ obsahujícím bod $x_0$ a splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

Poznámka. Řešení $y(x)$ rovnice (3) resp. (4), které má tu vlastnost, že v každém bodě je porušena jednoznačnost, se nazývá singulárním řešením.

Např. funkce $y \equiv 0$ na $\mathbb{R}$ je singulárním řešením rovnice $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$. Je-li totiž $c \in \mathbb{R}$ libovolný bod, pak funkce $y_c(x) = (x-c)^3$ řeší rovnici a $y_c(c) = 0$, přičemž $y_c(x) \neq 0 \ \forall x \neq c$.

## Geometrická interpretace rovnice $y' = f(x,y)$

Diferenciální rovnice (4) přiřazuje každému bodu $(x,y) \in G$ právě jednu hodnotu $y'$, kterou lze chápat jako směrnici přímky procházející bodem $(x,y)$. Této přímce je možné přiřadit krátkou úsečku se středem v bodě $(x,y)$ ležící na této přímce nazvanou lineární element. Množina všech lineárních elementů se nazývá směrové pole dané rovnice (4).

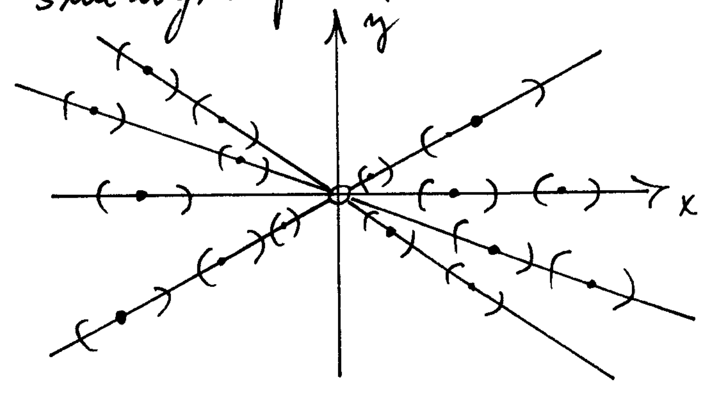
Grafy řešení $y = h(x)$ diferenciální rovnice (4) mají tu vlastnost, že jejich tečna v každém bodě $(x, h(x))$ má směrnici rovnu $f(x, h(x))$ což znamená, že obsahuje příslušný lineární element se středem v bodě $(x, h(x))$.

Dále křivky definované rovnicí $f(x,y) = c$, kde $c \in R$ je konstanta se budou nazývat izokliny rovnice (4).

Příklad. Sestrojte směrové pole diferenciálních rovnic, načrtněte jejich izokliny a graf řešení.

a) $y' = \dfrac{y}{x}$.

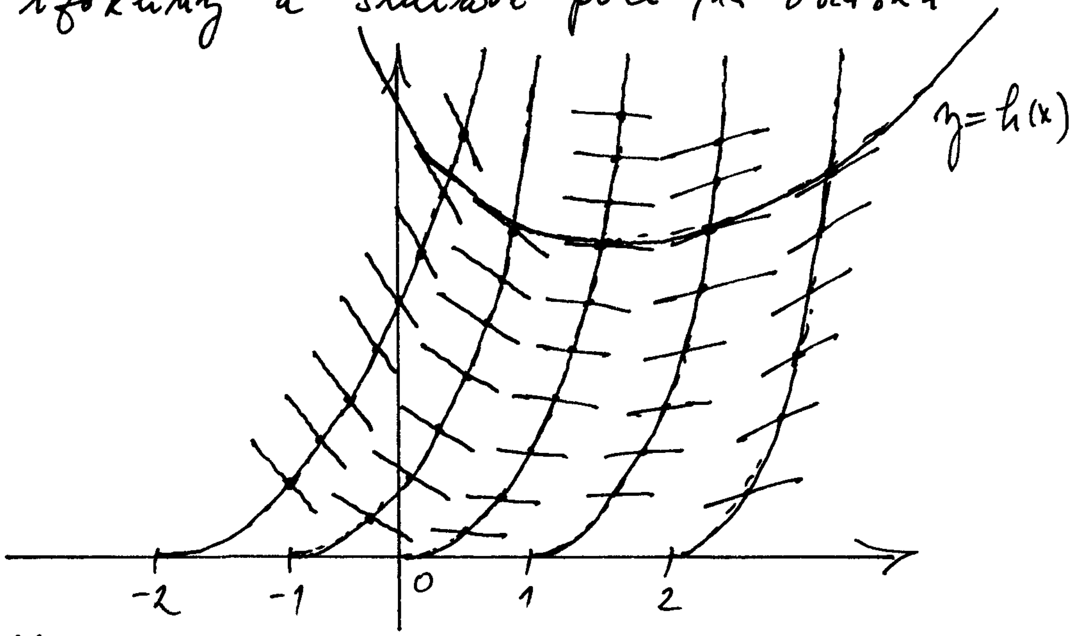
Řešení: Funkce $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ je definována všude mimo přímku o rovnici $x = 0$. Izokliny této rovnice jsou pak přímky o rovnici $y = cx$, $c \in R$. Izokliny spolu se směrovým polem této rovnice pak vypadá takto:



Řešením jsou funkce $y = cx$, $c \in \mathbb{R}$.

b) $y' = x - \sqrt{y}$

<u>Řešení</u>: Funkce $f(x,y) = x - \sqrt{y}$ je definovaná $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $y \geq 0$, tedy na horní uzavřené polorovině v $\mathbb{R}^2$. Izokliny mají rovnici: $x - \sqrt{y} = c$, kde $y \geq 0$ a $x \geq c$ (neboť $\sqrt{y} \geq 0$). Jedná se tedy o větve parabol $y = (x-c)^2$ pro $x \geq c$. Znázorněme nyní izokliny a směrové pole na obrázku




izokliny pro $c = -2, -1, 0, 1$ a $2$

Řešením jsou křivky zadané implicitní rovnicí:

$$(2\sqrt{y} - x)(\sqrt{y} + 1)^2 = k, \text{ kde } k \in \mathbb{R} \text{ je konstanta.}$$

## Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $(a,b)$ a že funkce $g(y)$ je spojitá na intervalu $(c,d)$. Pak se diferenciální rovnice

$$y' = f(x)\, g(y) \tag{5}$$

nazývá diferenciální rovnicí se separovatelnými proměnnými.

Řešení:

Za předpokladu, že $g(y) \neq 0$, $y \in (c,d)$ rovnici (5) formálně přepíšeme do tvaru:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx .$$

Integrály levé i pravé strany jsou si rovny:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx .$$

Po nalezení obou integrálů odtud vyjdeme řešení $y = h(x)$. Je-li pro nějaké $\lambda \in (c,d)$ $g(\lambda) = 0$, pak konstantní fce $h(x) \equiv \lambda$ řeší rovnici (5) na intervalu $(a,b)$.

Příklad. Najděte obecné řešení rovnice:

$$y' = \frac{y-1}{x^2 y^2} .$$

Řešení: Rovnici přepíšeme do tvaru:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}\,\frac{y-1}{y^2} .$$

Dále za předpokladu $y \neq 1$ separujeme proměnné a dostaneme:

$$\frac{y^2}{y-1}\,dy = \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Odtud plyne rovnost integrálů:

$$\int \frac{y^2}{y-1}\,dy = \int \frac{1}{x^2}\,dx \implies$$

$$\implies \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + c\,,\quad c \in \mathbb{R}.$$

Triviální je řešení $y=1$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

<u>Příklad</u>. Řešme Cauchyovu počáteční úlohu:

$$y' = x\,(1-y)\,,\quad y(x_0) = y_0\,,\ \text{kde } x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

<u>Řešení</u>: Všimněme si, že konstantní funkce $y=1$ řeší na $\mathbb{R}$ tuto rovnici a je řešením Cauchyovy úlohy pokud $y_0 = 1$.

Předpokládejme dále, že $y_0 \neq 1$ a rovnici upravme do tvaru:

$\dfrac{dy}{1-y} = x\,dy$, kde předpokládáme, že $y \neq 1$. Odtud prointegrováním na levé a na pravé straně obdržíme podmínku: $\ln|1-y| = -\dfrac{x^2}{2} + c$, $x \in (-\infty, \infty)$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak platí: $|1-y| = e^{-\frac{x^2}{2}+c} \implies$

$$\implies 1-y = \pm e^{-\frac{x^2}{2}+c} = \pm e^c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \implies$$

$$\implies y = 1 \mp e^c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + k e^{-\frac{x^2}{2}},\ \text{kde } x \in (-\infty, \infty)$$

a $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Tedy obecné řešení naší rovnice obsahující i triviální řešení $y=1$ má tvar:

$$y = 1 + k \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in (-\infty, \infty) \text{ a } k \in \mathbb{R} \text{ je konstanta.}$$

Pro $k=0$ opravdu dostáváme triviální řešení $y=1$.

Má-li f-ce $y = 1 + ke^{-\frac{x^2}{2}}$ vyhovovat počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$, musí platit:

$$y_0 = 1 + ke^{-\frac{x_0^2}{2}} \Rightarrow k = (y_0 - 1)e^{\frac{x_0^2}{2}}.$$

Je-li $y_0 \neq 1$, pak f-ce $y = 1 + (y_0-1)e^{\frac{x_0^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} =$ $= 1 + (y_0 - 1)e^{-\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)}$ je řešením Cauchyovy počáteční úlohy.

$\square$

## Homogenní diferenciální rovnice

Předpokládejme, že funkce $f(z)$ je spojitá na intervalu $(a,b)$. Pak se diferenciální rovnice

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6}$$

nazývá homogenní diferenciální rovnicí.

Postup řešení: zavedeme novou proměnnou $z$ substitucí $z = \frac{y}{x}$. Odtud je $y = zx$ a derivováním podle $x$ dostaneme: $y' = z'x + z$. Rovnice (6) se pak transformuje na rovnici se separovatelnými proměnnými:

$$z'x + z = f(z). \tag{7}$$

Je-li pak $z(x)$ řešením rovnice (7), potom je funkce $y(x) = x\,z(x)$ řešením rovnice (6) a naopak, je-li $y(x)$ řešením rovnice (6), pak je funkce $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ řešením rovnice (7).

Poznámka: Funkce dvou proměnných $f(x,y)$ se nazývá homogenní stupně $\alpha \in \mathbb{R}$, jestliže pro $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ platí:

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x,y).$$

Uvažujeme-li fci $g(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$, pak pro $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ máme:

$$g(tx, ty) = f\left(\frac{ty}{tx}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right) = t^0 g(x,y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ funkce $g(x,y)$ je homogenní funkcí stupně $\alpha = 0$.

<u>Příklad</u>. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y-x}{y+x}.$$

<u>Řešení</u>: Za předpokladu, že $x \neq 0$ upravme rovnici na tvar:

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1},$$

a položme $z = y/x$. Pak $y = z \cdot x$. Dosazením do rovnice obdržíme rovnici se separovatelnými proměnnými:

$$z'x + z = \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow$$

$$z'x = \frac{z-1}{z+1} - z \Rightarrow$$

$$z'x = -\frac{z^2+1}{z+1} \Rightarrow$$

$$\frac{z+1}{z^2+1}\,dz = -\frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \int \frac{z+1}{z^2+1}\,dz = -\int \frac{1}{x}\,dx.$$

Po integraci máme:

$$\frac{1}{2}\ln(z^2+1) + \operatorname{arctg} z = -\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \ln(z^2+1) + 2\operatorname{arctg} z = -\ln x^2 + 2C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní dosadíme $z = \frac{y}{x}$ do předchozí rovnice:

$$\ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) + \ln x^2 = 2C - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Po úpravě máme:

$\ln(y^2+x^2) = 2c - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \; c\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2+x^2 = e^{2c}\cdot e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}, \; c\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2+x^2 = k\cdot e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}, \; k\in\mathbb{R}, \; k>0.$

Řešení je takto dáno implicitně touto rovnicí.

<u>Lineární</u> <u>rovnice</u> <u>1. řádu</u>: $y'+a(x)y=b(x)$

Předpokládejme, že funkce $a(x)$ a $b(x)$ jsou na nějakém otevřeném intervalu $I$ spojité. Pak se bude rovnice ve tvaru:

$$y'+a(x)y=b(x) \qquad (8)$$

nazývat lineární diferenciální rovnicí 1. řádu.

<u>Postup</u> <u>řešení</u>:

1.) ~~krok~~: Uvažujme nejdříve případ, kdy $b(x)\equiv 0$ na $I$. Pak má rovnice (8) tvar:

$$y'+a(x)y=0 \qquad (9)$$

a nazýváme ji <u>homogenní</u> <u>lineární</u> <u>dif. rovnicí</u> <u>1. řádu</u>. Jedná se o rovnici se separovatelnými proměnnými. Všimněte si, že konstantní fce $y=0$ vždy řeší rovnici (9).

2) Je-li $b(x)\not\equiv 0$ na $I$, pak se rovnice (8) nazývá <u>nehomogenní</u>.

Nyní si ukážeme dvě metody jak řešit nehomogenní rovnici.

a) <u>řešení metodou variace konstanty</u> :

Metoda spočívá v tom, že budeme hledat řešení ve tvaru :

$$y(x) = C(x) \cdot e^{-\int a(x)\,dx}, \quad x \in I. \qquad (10)$$

Uvědomme si, že obecné řešení rovnice homogenní (10) má tvar :

$$y(x) = C \cdot e^{-\int a(x)\,dx}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in I.$$

V předpisu (12) je $C(x)$ neznámá funkce, kterou určíme dosazením za $y$ a $y'$ do rovnice (8).

Spočteme nejdříve derivaci $y'(x)$ :

$$y'(x) = C'(x) e^{-\int a(x)\,dx} + C(x) \left(-a(x)\right) e^{-\int a(x)\,dx}.$$

Pak po dosazení do rovnice (8) dostáváme :

$$C'(x) e^{-\int a(x)\,dx} = b(x),$$

tedy $\quad C'(x) = b(x)\, e^{\int a(x)\,dx}.$

Odtud po integraci obdržíme vyjádření neznámé funkce $C(x)$ :

$$C(x) = \int b(x) e^{\int a(x)\,dx}\, dx + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Poté dosazením $C(x)$ do vztahu (10) dostaneme obecné řešení nehomogenní rovnice (8) ve tvaru :

$$y(x) = K e^{-\int a(x)\,dx} + e^{-\int a(x)\,dx} \int b(x) e^{\int a(x)\,dx}\, dx,$$

$x \in I.$

b) řešení metodou integračního faktoru:

Metoda spočívá v tom, že rovnici (8) vynásobíme funkcí $e^{\int a(x)dx}$, kterou nazveme integrační faktor, a dostaneme:

$$y' e^{\int a(x)dx} + a(x) y e^{\int a(x)dx} = b(x) e^{\int a(x)dx},$$

neboli

$$\left(y e^{\int a(x)dx}\right)' = b(x) e^{\int a(x)dx}.$$

Po integraci dostaneme:

$$y e^{\int a(x)dx} = \int b(x) e^{\int a(x)dx} dx + K, \; K \in \mathbb{R}.$$

Po úpravě máme:

$$y(x) = K e^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx} \int b(x) e^{\int a(x)dx} dx, \quad (10)$$

kde $K \in \mathbb{R}$, $x \in I$.

Poznámka. Ze vztahu (10) plyne, že obecné řešení nehomogenní rovnice (8) je součtem dvou funkcí: $K e^{-\int a(x)dx}$, $K \in \mathbb{R}$, což je obecné řešení homogenní rovnice (9) a funkce $e^{-\int a(x)dx} \int b(x) e^{\int a(x)dx} dx$, která je řešením nehomogenní rovnice (8) a nazývá se partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Příklady. 1) Řešme nehomogenní lineární rovnici 1. řádu:

$$y' + 2xy = x. \quad (11)$$

a) (Variace konstanty). Rozřešme nejdříve homogenní rovnici: $y' + 2xy = 0$:

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx \implies \ln|y| = -x^2 + k, \; k \in \mathbb{R}.$$

Odtud dostáváme obecné řešení ~~~~ homogenní rovnice:

$$y(x) = Ce^{-x^2}, \quad C \text{ je konstanta}, \ C = e^K, \ C \neq 0.$$

Nyní hledejme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y(x) = C(x)e^{-x^2}, \text{ kde } C(x) \text{ je neznámá funkce}$$

proměnné $x$:

$y'(x) = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x)$. Nyní dosadíme za $y(x)$ a $y'(x)$ do rovnice $y' + 2xy = x$ předpisy uvedených funkcí:

$$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x) + 2xC(x)e^{-x^2} = x$$

$$\Downarrow$$

$$C'(x)e^{-x^2} = x$$

$$\Downarrow$$

$$C'(x) = x \cdot e^{x^2} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + K, \ K \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení za $C(x)$ do předpisu obecného řešení $y(x) = C(x)e^{-x^2}$ dostáváme:

$$y(x) = \frac{1}{2} + Ke^{-x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \ K \in \mathbb{R}.$$

b) (Metoda integračního faktoru).

V našem případě je $a(x) = 2x$ a tedy integračním faktorem bude fce $e^{\int a(x)\,dx} = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$. Vynásobíme rovnici (11) tímto integračním faktorem a máme:

$$e^{x^2}(y' + 2xy) = xe^{x^2} \Rightarrow (y \cdot e^{x^2})' = xe^{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ye^{x^2} = \int xe^{x^2}dx + K = \frac{1}{2}e^{x^2} + K \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{2} + Ke^{-x^2} \text{ v intervalu } (-\infty, \infty), \ K \in \mathbb{R}.$$

$\square$

2) Řešme rovnici $\cos x\, y' = y \sin x + \cos^2 x$, kde $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Řešení: Z předpokladu, že $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ plyne, že $\cos x > 0$. Pak lze ovšem upravit rovnici do tvaru:

$$y' - \frac{\sin x}{\cos x} y = \cos x,$$

což je nehomogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu. Řešme nejdříve příslušnou homogenní rovnici:

$$y' - \frac{\sin x}{\cos x} y = 0.$$

Separací proměnných přepíšeme tuto rovnici do tvaru:

$$\frac{dy}{y} = \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + k, \ k \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln|k|, \quad k \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad |y| = \frac{|k|}{\cos x}$$ a po odstranění abs. hodnot dostaneme:

$$y = \frac{\pm k}{\cos x}, \quad \pm k \neq 0.$$

Protože homogenní rovnice má vždy triviální řešení $y = 0$, dostáváme obecné řešení homogenní rovnice ve tvaru:

$$y(x) = \frac{c}{\cos x}, \ c \in \mathbb{R}, \ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Nyní hledejme řešení nehomogenní rovnice metodou variace konstanty. Předpokládaný tvar řešení pak bude: $y(x) = \dfrac{C(x)}{\cos x}$, kde $C(x)$ je neznámá funkce.

$$y'(x) = \frac{C'(x)\cos x - C(x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = C'(x)\frac{1}{\cos x} + C(x)\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Pak dosazením do rovnice $y' - \frac{\sin x}{\cos x} y = \cos x$ za $y$ a za $y'$, dostaneme:

$$\frac{C'(x)}{\cos x} = \cos x.$$

Odtud získáme integrací předpis neznámé funkce $C(x)$:

$$C(x) = \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + K,$$

$K \in \mathbb{R}$. Nyní dosazením $C(x)$ do vztahu: $y(x) = \frac{C(x)}{\cos x}$ dostáváme obecné řešení dané rovnice:

$$y(x) = \frac{K}{\cos x} + \frac{2x + \sin 2x}{4\cos x}, \quad K \in \mathbb{R},$$

což je řešení i na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\square$

3) Řešme rovnici: $(2x+1)y' = 4x + 2y$.

Řešení: Je-li $(2x+1) \neq 0$, pak lze rovnici upravit do tvaru:

$$y' - \frac{2}{2x+1} y = \frac{4x}{2x+1}.$$

Řešme nejdříve homogenní rovnici:

$$y' - \frac{2}{2x+1} y = 0 \overset{\text{separace}}{\Longrightarrow} \frac{dy}{y} = \frac{2}{2x+1} dx$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{2x+1} dx + K, \quad K \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \ln|y| = \ln|2x+1| + k$. Odtud pak dostáváme obecné řešení homogenní rovnice ve tvaru:

$$y(x) = C(2x+1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dále hledejme řešení nehomogenní rovnice metodou variace konstanty. Hledejme tedy řešení ve tvaru:

$$y(x) = C(x)\,(2x+1), \text{ kde } C(x) \text{ je neznámá f-ce.}$$

Po dosazení do výchozí rovnice $(2x+1)\,y' = 4x + 2y$, máme:

$$\left(C'(x)(2x+1) + 2C(x)\right)(2x+1) = 4x + 2C(x)(2x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (2x+1)^2 C'(x) = 4x \Rightarrow C'(x) = \frac{4x}{(2x+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(x) = 4\int \frac{x\,dx}{(2x+1)^2} + k = \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + k.$$

Odtud nakonec po dosazení $C(x)$ do předpokládaného řešení dostáváme obecné řešení výchozí nehomogenní rovnice:

$$y(x) = (2x+1)\left(\ln|2x+1| + k\right) + 1.$$

□