Lineární diferenciální rovnice řádu n - příklady

Příklad 1. Zjistěte, jsou-li dané funkce lineárně nezávislé na $\mathbb{R}$.

a) $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$.

Řešení. Spočteme wronskián:

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} =$$

$$= -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \implies w(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a tedy funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou na $\mathbb{R}$ lineárně nezávislé.

b) $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \sin^2 x$, $y_3(x) = \cos 2x$.

$$w(x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos 2x \\ 0 & \sin 2x & -2\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -4\cos 2x \end{vmatrix} = -4\sin 2x \cos 2x +$$

$$+ 4\sin 2x \cos 2x = 0 \implies w(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a tedy funkce $y_1(x)$, $y_2(x)$ a $y_3(x)$ jsou lineárně závislé na $\mathbb{R}$.

Příklad 2. Najděte homogenní lineární rovnici (co nejnižšího řádu), která má řešení $y_1(x) = 3x$, $y_2(x) = x-2$, $y_3(x) = e^x + 1$.

Řešení: Zjistěme, zdali jsou dané funkce lineárně nezávislé pomocí wronskiánu:

$$w(x) = \begin{vmatrix} 3x & x-2 & e^x+1 \\ 3 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = 2e^x \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ funkce $y_1(x)$, $y_2(x)$ a $y_3(x)$ jsou lineárně nezávislé a tvoří ~~funkce~~ fundamentální systém rovnice 3. řádu

$$\begin{vmatrix} 3x & x-2 & e^x+1 & y \\ 3 & 1 & e^x & y' \\ 0 & 0 & e^x & y'' \\ 0 & 0 & e^x & y''' \end{vmatrix} = 0 .$$

Výpočtem determinantu obdržíme rovnici:

$$y''' - y'' = 0$$

Příklad 3. Najděte řešení rovnice 2. řádu:

$$(1-2x^2)\,y'' + 2y' + 4y = 0,$$

které je tvaru algebraického polynomu (pokud takové řešení existuje).

Řešení: Najděme stupeň polynomu. Položme:
$y(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ a dosaďme do dané rovnice: $y' = nx^{n-1} + \dots$, $y'' = n\cdot(n-1)x^{n-2} + \dots$
(omezíme se pouze na členy s nejvyšší mocninou x). Porovnáním koeficientů dostáváme:

$$-2n(n-1)x^n + 4x^n + \dots = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2n(n-1) + 4 = 0 \Rightarrow n_{1,2} \left\langle \begin{matrix} -1 \\ \underline{\underline{2}} \end{matrix} \right. .$$

Hledejme tedy řešení jako polynom 2. stupně:

$$y(x) = x^2 + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R} .$$

Dosaďme do rovnice:

$$(1-2x^2)\cdot 2 + 2(2x+a) + 4\cdot(x^2+ax+b) = 0$$
$$4x + 4ax + 2 + 2a + 4b = 0 .$$

Porovnáním ~~koe~~ koeficientů u mocnin proměnné x,

$$\left.\begin{array}{r} 4+4a=0 \\ 2+2a+4b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-1,\ b=0.$$

Řešením dané rovnice je funkce $y(x)=x^2-x$. □

Příklad 4. Najděte obecné řešení rovnice 2. řádu

$$(2x+1)y''+4xy'-4y=0.$$

Řešení. Pokusme se nalézt jedno řešení ve tvaru exponenciální funkce $y=e^{ax}$, $a\in\mathbb{R}$. Dosazením do rovnice dostáváme:

$$(2x+1)a^2e^{ax}+4xae^{ax}-4e^{ax}=0$$

$$(2a^2+4a)x+a^2-4=0.$$

Rovnice je splněna pro $a=-2$. Tedy funkce $y(x)=e^{-2x}$ řeší danou rovnici na $\mathbb{R}$.

Známe tedy partikulární řešení $y_1(x)=e^{-2x}$. Druhé lin. nezávislé řešení $y_2(x)$ najdeme metodou snížení řádu rovnice. Položme $y_2(x)=y_1(x)\cdot z(x)$, pak máme: $y_2'=y_1'z+y_1\cdot z'$, $y_2''=y_1''z+2y_1'z'+y_1z''$. Po dosazení do dané rovnice máme:

$$(2x+1)e^{-2x}z''-(4x+4)e^{-2x}z'=0 \ \Big/\cdot\frac{1}{e^{2x}}$$

Po substituci $z'=u$ přejde rovnice do tvaru:

$$(2x+1)u'=4(x+1)u,$$

což je rovnice se separovatelnými proměnnými. Separací proměnných dostáváme:

$$\frac{du}{u}=4\,\frac{x+1}{2x+1}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u(x)=Ce^{2x}(2x+1),\ \text{kde } C\in\mathbb{R}, C\neq 0.$$

Zvolme $C=1$ a dosaďme do $z'=u$:

$$z'(x)=e^{2x}(2x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z(x)=\int(2x+1)e^{2x}dx=xe^{2x}+C',\ C'\in\mathbb{R}.$$

Pro $C'=0$ máme: $z(x)=xe^{2x}$. Pak

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot z(x)=e^{-2x}\cdot xe^{2x}=x.$$

Obecné řešení dané rovnice má potom tvar:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \cancel{c_1 x + c_2 e^{-2x}}$$
$$= c_1 e^{-2x} + c_2 x .$$

□

<u>Příklad 5.</u> Najděte obecné řešení rovnice 3. řádu

$$x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0,$$

pokud $y_1(x) = x$ a $y_2(x) = \frac{1}{x}$ jsou dvě partikulární řešení této rovnice.

<u>Řešení</u>: Použijeme metodu snížení řádu. Vybereme jedno z partikulárních řešení tak, abychom byli schopni nalézt řešení získané rovnice 2. řádu. V našem případě položíme $y_3 = y_2 z$, kde z je neznámá funkce a pak $z' = u$ a po dosazení obdržíme rovnici 2. řádu:

$$x(2x-1)u'' - 2xu' + 2u = 0.$$

Protože neznáme žádné řešení této rovnice, pokusíme se nalézt řešení ve tvaru polynomu $u_1 = x^n + \dots$. Pak $u_1' = nx^{n-1} + \dots$, $u_1'' = n\cdot(n-1)x^{n-2} + \dots$. Dosadíme do rovnice a porovnáme koeficienty u nejvyšší mocniny proměnné x. Dostaneme tak rovnici

$$2n(n-1) - 2n + 2 = 0,$$

tj.

$$n^2 - 2n + 1 = 0 \Rightarrow n = 1.$$

Řešení $u_1(x)$ budeme tedy hledat jako polynom 1. stupně $u_1(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou neznámé konstanty. Dosadíme tedy do příslušné rovnice $u_1 = ax + b$, $u_1' = a$, $u_1'' = 0$ a dostaneme:

$$-2ax + 2ax + b = 0,$$

což je splněno pro $b = 0$ a pro libovolné $a \in \mathbb{R}$. Zvolíme tedy například $a = 1$ a získáme řešení $u_1(x) = x$. Po zpětném dosazení $z' = u_1$ je pak

$z(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, a dále $y_3(x) = y_2(x)\,z(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}$ což je řešení lineárně závislé na y_1. Hledejme ještě druhé řešení $u_2(x)$. Za tím účelem použijme Ostrogradského–Liouvilleův vzorec. Pak máme (viz. vzorec (11)):

$$u_2(x) = x \int \left(\frac{1}{x^2}\, e^{-\int \frac{2x}{x(2x-1)}\,dx} \right) dx =$$

$$= x \int \frac{2x-1}{x^2}\,dx = 2x \ln|x| + 1 \overset{\text{zpětné dosazení}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow (z' = u_2) \Rightarrow z(x) = \int (2x \ln|x| + 1)\,dx = x^2 \ln|x| - \frac{x^2}{2} + x,$$

a $y_3(x) = \frac{1}{x}\, z(x) = x \ln|x| - \frac{x}{2} + 1.$

Fundamentální systém výchozí rovnice je tedy: $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$, $y_3 = x \ln|x| + 1$ a obecné řešení má pak tvar:

$$y(x) = c_1 x + c_2 \frac{1}{x} + c_3 (x \ln|x| + 1), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

$z(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, a dále $y_3(x) = y_2(x)\,z(x) =$
$= \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}$ což je řešení lineárně ~~ne~~závislé na
y_1. Hledejme ještě druhé řešení $u_2(x)$. Za tím účelem použijme Ostrogradského–Liouvilleův vzorec.
Pak máme (viz. vzorec (11)):

$$u_2(x) = x \int\left(\frac{1}{x^2}\, e^{-\int \frac{2x}{x(2x-1)}\,dx}\right)dx =$$

$$= x\int \frac{2x-1}{x^2}\,dx = 2x\ln|x| + 1 \quad \overset{\text{zpětné dosazení}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow (z' = u_2) \Longrightarrow \quad z(x) = \int (2x\ln|x| + 1)\,dx = x^2\ln|x| - \frac{x^2}{2} + x,$$

a $\quad y_3(x) = \frac{1}{x}\,z(x) = x\ln|x| - \frac{x}{2} + 1.$

Fundamentální systém výchozí rovnice je tedy:
$y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$, $y_3 = x\ln|x| + 1$ a obecné řešení má pak tvar:

$$y(x) = c_1 x + c_2\frac{1}{x} + c_3\,(x\ln|x| + 1), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

<u>Příklad 6.</u> Najděte obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$(x+1)\,x\,y'' + (x+2)\,y' - y = x + \frac{1}{x},$$

jestliže příslušná rovnice má řešení ve tvaru polynomu.

<u>Řešení</u>: Hledejme nejdříve fundamentální systém příslušné ~~rovnice~~ homogenní rovnice:

$$(x+1)\,x\,y'' + (x+2)\,y' - y = 0.$$

Víme, že jedno z řešení rovnice (pNLn) má tvar $y(x) = x^n + \ldots$ Pak $y'(x) = n\,x^{n-1} + \ldots$, $y''(x) = n\cdot(n-1)\,x^{n-2} + \ldots$ atd a dosadíme do rovnice a porovnejme koeficienty u nejvyšší mocniny proměnné x:

$$0 = (x+1)x\,y'' + (x+2)y' - y =$$
$$= [n\cdot(n-1) + n - 1]x^{n} + \dots \implies$$
$$\implies n\cdot(n-1)+n-1 = 0 \iff n^2-1=0 \iff n = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right. .$$

Tedy do úvahy přichází končn $n=1$. Hledejme tedy řešení ve tvaru $y(x) = ax+b$, $a, b \in \mathbb{R}$ jsou zatím neznámé konstanty. Pak dosadíme do rovnice $y = ax+b$, $y' = a$, $y''=0$:

$$a(x+2) - (ax+b) = 0 \iff 2a - b = 0 \iff$$
$$\iff 2a = b.$$

Zvolíme-li např. $a=1$ a $b=2$, dostáváme partikulární řešení homogenní rovnice $y_1(x) = x+2$.

Známe-li nyní jedno nenulové řešení, lze metodou snížení řádu dopočítat druhé, lineárně nezávislé řešení příslušné homogenní rovnice.

Z Lagrangeova-Liouvilleova vzorce plyne:

$$y_2(x) = y_1(x)\int\left(\frac{1}{y_1^2(x)}\, e^{-\int\frac{x+2}{x(x+1)}dx}\right)dx =$$

$$= (x+2)\int\left(\frac{1}{(x+2)^2}\, e^{-\int\frac{x+2}{x(x+1)}dx}\right)dx\ ; \quad \text{kde}$$

$$\int\frac{x+2}{x(x+1)}dx = 2\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{x+1} = 2\ln|x| - \ln|x+1| + C_1 =$$
$$= \ln\frac{x^2}{|x+1|} + C_1 \implies e^{-\int\frac{x+2}{x(x+1)}dx} = e^{-\ln\frac{x^2}{|x+1|} - C_1} =$$
$$= e^{\ln\frac{|x+1|}{x^2} - C_1} = e^{\ln\frac{|x+1|}{x^2}}\cdot e^{-C_1} = \frac{|x+1|}{x^2}\, e^{-C_1} = \underline{C_2\frac{x+1}{x^2}}\ ;$$

Tedy $y_2(x) = (x+2)\int\left(\frac{1}{(x+2)^2}\cdot C_2\frac{x+1}{x^2}\right)dx =$

$$= C_2(x+2)\int\frac{x+1}{x^2(x+2)^2}\,dx\ ;$$

kde $\int \frac{x+1}{x^2(x+2)^2}\,dx = \int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}\right)dx$,

pak parametry musí splňovat soustavu rovnic:

$$\left.\begin{array}{lllll} A & & +C & & =0 \\ 4A & +B & +C & +D & =0 \\ 4A & +4B & & & =1 \\ & 4B & & & =1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=0,\ B=\frac{1}{4},\ C=0,\ D=-1/4.$$

pak

$$\int \frac{x+1}{x^2(x+2)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4x} + \frac{1}{4(x+2)} + C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}.$$

Odtud $y_2(x) = C_2(x+2)\int \frac{x+1}{x^2(x+2)^2}\,dx =$

$$= C_2(x+2)\left(-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4(x+2)}+C_3\right) = \dots =$$

$$= -\frac{C_2}{2}\,\frac{1}{x} + C_2C_3(x+2);$$ zvolíme-li $C_2=-2$, $C_3=0$, pak

dostáváme partikulární řešení $y_2(x)=\frac{1}{x}$.
Tedy fundamentální systém řešení příslušné homogenní rovnice je $y_1(x)=x+2$, $y_2(x)=\frac{1}{x}$.

Hledejme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru:

$$y(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x) = C_1(x)\,(x+2) + C_2(x)\,\frac{1}{x},$$

kde $C_1(x)$ a $C_2(x)$ jsou neznámé funkce, jejichž derivace vyhovují soustavě rovnic z věty 12:

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'(x+2) + C_2\,\frac{1}{x} = 0 \\ C_1' - C_2'\,\frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x+1)} \end{array}\right.$$

Z druhé rovnice ~~…~~ vyjádříme:

$$C_1' = \frac{x^2+1}{x^2(x+1)} + C_2' \frac{1}{x^2} .$$

Dosazením do první rovnice obdržíme:

$$C_2' = -\frac{1}{2} \frac{(x^2+1)(x+2)}{(x+1)^2} ;$$

po integraci máme:

$$C_2 = \frac{1}{x+1} - \frac{x^2-1}{4} + k , \; k \in \mathbb{R} .$$

Dosazením za C_2 do vztahu pro C_1' máme:

$$C_1' = \frac{1}{2} \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{x+1} + k' , \; k' \in \mathbb{R} .$$

Tedy dosazením do vztahu pro y obdržíme:

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{x+1} + k\right)(x+2) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x^2-1}{4} + k\right)\frac{1}{x} .$$

Po úpravě:

$$y(x) = \left(\frac{x}{2}+1\right)\ln|x| + \left(k - \frac{1}{4}\right)(x+2) + \left(\frac{5}{4} + k'\right)\frac{1}{x} + \frac{3}{2} .$$

Pro $k = \frac{1}{4}$, $k' = -\frac{5}{4}$ máme:

$$y_p(x) = \left(\frac{x}{2}+1\right)\ln|x| + \frac{3}{2} .$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice má ~~…~~ potom podle důsledku 11 tvar:

$$y(x) = C_1 (x+2) + C_2 \frac{1}{x} + \left(\frac{x}{2}+1\right)\ln|x| + \frac{3}{2} .$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. ∎

Příklad 7. Najděte obecné řešení nehomogenní rovnice:
$$(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 6x,$$
jestliže dvě partikulární řešení jsou
$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Řešení: Určíme fundamentální systém příslušné homogenní rovnice. Podle věty 10 bod 2 dostaneme jedno řešení homogenní rovnice jako rozdíl:
$$u(x) = y_2(x) - y_1(x) =$$
$$= \frac{x^2+x+1}{x+1} - x = \frac{1}{x+1}.$$

Druhé řešení homogenní rovnice $v(x)$ dostaneme s využitím Ostrogradského-Liouvillova vzorce.
$$w(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)\,dx} = Ce^{-\int \frac{4x}{x^2-1}\,dx} =$$
$$= C\frac{1}{(x^2-1)^2}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \text{Pak}$$
$$\frac{v(x)}{u(x)} = C\int \frac{\frac{1}{(x^2-1)^2}}{\frac{1}{(x+1)^2}}\,dx = C\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{C}{x-1} + C',$$
$C' \in \mathbb{R}$. Odtud tedy dostáváme:
$$v(x) = -\frac{C}{x^2-1} + \frac{C'}{x+1} = \frac{\frac{1}{2}C}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}C}{x-1} + \frac{C'}{x+1}.$$

Pak, položíme-li $C' + \frac{1}{2}C = 0$ a $C = -2$, potom dostaneme partikulární řešení homogenní rovnice:
$$v(x) = \frac{1}{x-1}.$$
Obecné řešení homogenní rovnice je tedy:
$$y(x) = C_1 u(x) + C_2 v(x) = C_1\frac{1}{x+1} + C_2\frac{1}{x-1},$$
kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Jelikož např. y_1 je partikulárním

řešením nehomogenní rovnice, má obecné řešení rovnice nehomogenní tento tvar:

$$y(x) = \frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2}{x-1} + x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Příklad 8. Najděme obecné řešení rovnice:

$$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Řešení: Charakteristická rovnice je:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Jeden kořen $\lambda_1 = 1$ lze uhodnout. Potom můžeme rovnici upravit do tvaru:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0.$$

Pak už lze snadno určit zbývající kořeny této rovnice: $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$.

Obecné řešení dané rovnice je tedy:

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-2x} + c_3 e^{3x}.$$

Příklad 9. Najděme obecné řešení rovnice:

$$y''' - 12y' + 16y = 0$$

Řešení: Sestavíme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^3 - 12\lambda + 16 = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = -4$.
Fundamentálním systémem dané rovnice pak budou funkce: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = x \cdot e^{2x}$, $y_3 = e^{-4x}$.
Obecné řešení je pak ve tvaru:

$$y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x e^{2x} + c_3 e^{-4x} = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + c_3 \cdot e^{-4x}.$$

Příklad 10. Najděme ~~řešení ro~~ obecné řešení rovnice

$$y''' + y'' + y' + y = 0.$$

Řešení: Charakteristická rovnice ~~má~~

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

má kořeny $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_{2,3} = \pm i$.

Řešení charakteristické rovnice:

$$\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0$$
$$\lambda^2(\lambda+1)+(\lambda+1)=0$$
$$(\lambda^2+1)(\lambda+1)=0$$
$$\lambda^2+1=0 \quad \vee \quad \lambda+1=0.$$

Tedy obecné řešení rovnice má tvar:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

<u>Příklad 11.</u> Najděme obecné řešení rovnice

$$y^{IV} + 4y'' + 4y = 0.$$

<u>Řešení</u>: Sestavme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = 0$$

Jedná se o bikvadratickou rovnici. Tuto rovnici lze snadno upravit do ekvivalentního tvaru:

$$(\lambda^2+2)^2 = 0.$$

Odtud plyne, že rovnice má dvojnásobné komplexní kořeny:

$$\lambda_{1,2} = +i\sqrt{2}, \quad \lambda_{3,4} = -i\sqrt{2}.$$

Fundamentální systém rovnice pak budou tvořit funkce:

$$y_1 = \cos(x\cdot\sqrt{2}),\ y_2 = x\cdot\cos(x\cdot\sqrt{2}),\ y_3 = \sin(x\sqrt{2}),$$
$$y_4 = x\cdot\sin(x\cdot\sqrt{2}).$$

Tedy obecné řešení dané rovnice má tvar:

$$y = (C_1 x + C_2)\cos(x\sqrt{2}) + (C_3 x + C_4)\sin(x\sqrt{2}).$$

<u>Příklad 12.</u> Najděme řešení Cauchyovy počáteční úlohy:

$$y''' - 2y'' + y' = \frac{e^x}{1+x}, \quad y(0)=0,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=-3.$$

<u>Řešení</u>: Hledejme nejdříve fundamentální systém příslušné homogenní rovnice: $y''' - 2y'' + y' = 0$.

Charakteristická rovnice je :

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 \iff \lambda\cdot(\lambda-1)^2 = 0.$$

Kořeny jsou tedy čísla: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$.
Fundamentální systém je tedy :

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^x, \quad y_3 = x\cdot e^x$$

Obecným řešením příslušné homogenní rovnice je tedy funkce :

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3\cdot x e^x$$

Hledejme nyní partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru :

$$y_p(x) = C_1(x) + C_2(x) e^x + C_3(x)\, x\cdot e^x,$$

kde $C_1(x)$, $C_2(x)$ a $C_3(x)$ jsou neznámé funkce.
Budeme tedy hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice metodou variace konstant. Derivace funkcí $C_1(x)$, $C_2(x)$ a $C_3(x)$ pak musí vyhovovat soustavě :

$$\begin{aligned} C_1'(x)\cdot 1 + C_2'(x)\cdot e^x + C_3'(x)\, x e^x &= 0 \\ C_2'(x) e^x + C_3'(x)(e^x + x e^x) &= 0 \\ C_2'(x) e^x + C_3'(x)(2e^x + x e^x) &= \frac{e^x}{1+x} \end{aligned}$$

Řešením této soustavy jsou funkce :

$$C_1'(x) = \frac{e^x}{1+x} \implies C_1(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt + k_1$$

(poznamenejme, že $\int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt$ není elementární funkcí)

$$C_2'(x) = -1 \implies C_2(x) = -x + k_2$$

$$C_3'(x) = \frac{1}{1+x} \implies C_3(x) = \ln|1+x| + k_3.$$

Obecné řešení rovnice je tedy :

$$y = \left(\int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt + k_1\right) + (-x + k_2) e^x + (\ln|1+x| + k_3)\, x e^x$$

Pak máme

$$y(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt - xe^x + k_2 e^x + xe^x \ln|1+x| + k_3 xe^x + k_1$$

$$= \int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt + xe^x(\ln|1+x| + k_3 - 1) + k_2 e^x + k_1 ;$$

$$y'(x) = \frac{e^x}{1+x} + (e^x + xe^x)(\ln|1+x| + k_3 - 1) + xe^x \frac{1}{1+x} +$$

$$+ k_2 e^x = \frac{xe^x + e^x}{1+x} + (e^x + xe^x)(\ln|1+x| + k_3 - 1) + k_2 e^x$$

$$= (e^x + xe^x)\left(\ln|1+x| + \frac{1}{1+x} + k_3 - 1\right) + k_2 e^x ;$$

$$y''(x) = (2e^x + xe^x)\left(\ln|1+x| + \frac{1}{1+x} + k_3 - 1\right) + $$
$$+ (e^x + xe^x)\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right) + k_2 e^x .$$

Dosazením počátečních podmínek $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -3$ do předchozích vztahů dostaneme podmínky pro konstanty k_1, k_2 a k_3:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 \quad &= 0 \\ k_2 + k_3 &= -1 \\ k_2 + 2k_3 &= -3 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme: $k_3 = -2$, $k_2 = 1$, $k_1 = -1$.
Řešením Cauchyovy úlohy je tedy funkce:

$$y(x) = e^x(1 - 3x + x\ln|1+x|) - 1 + \int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt . \qquad \square$$

Lineární rovnice s konstantními koeficienty se speciální pravou stranou

Příklad 13. Najděme obecné řešení nehomogenní rovnice:
$$y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^x.$$
Řešení: Nejdříve budeme řešit příslušnou homogenní rovnici: $y''' - 4y'' + 3y' = 0$. Charakteristická rovnice je:
$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda\cdot(\lambda-3)(\lambda-1) = 0.$$
Kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. Fundamentální systém je: $y_1 = 1$, $y_2 = e^{3x}$, $y_3 = e^x$.
Partikulární řešení rovnice $L(y) = x^2 + xe^x$ budeme hledat jako součet partikulárních řešení rovnic
$$L(y) = x^2 \quad , \quad L(y) = xe^x.$$
1) Řešme rovnici $L(y) = x^2$. Pravá strana je polynom 2. stupně a 0 je jednonásobným kořenem charakteristické rovnice a proto budeme hledat řešení ve tvaru: $u = x(ax^2 + bx + c)$, kde a, b, c jsou neznámé koeficienty. Pak máme:
$$u' = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$u'' = 6ax + 2b$$
$$u''' = 6a.$$
Pak dosazením do rovnice $L(y) = x^2$ dostáváme:
$$6a - 24ax - 8b + 9ax^2 + 6bx + 3c = x^2.$$
Pak porovnáním koeficientů u příslušných mocnin x máme: $a = \frac{1}{9}$, $b = \frac{4}{9}$, $c = \frac{26}{27}$. Partikulární řešení rovnice $L(y) = x^2$ je
$$u = \frac{x}{9}\left(x^2 + 4x + \frac{26}{3}\right).$$
2) $L(y) = x\cdot e^x$.
Pravá strana je součin polynomu 1. stupně a funkce e^{2x}. Protože číslo 2 není kořenem charakteristické

rovnice, hledáme partikulární řešení rovnice ve tvaru: $v = (ax+b)e^{2x}$,
kde a, b jsou neznámé koeficienty. Pak

$$v' = ae^{2x} + 2(ax+b)e^{2x}$$
$$v'' = 4ae^{2x} + 4(ax+b)e^{2x}$$
$$v''' = 12ae^{2x} + 8(ax+b)e^{2x}.$$

Dosazením do rovnice $L(y) = xe^{2x}$ dostáváme:

$$12a + 8(ax+b) - 16a - 16(ax+b) + 3a + 6(ax+b) = x.$$

Odtud porovnáním koeficientů u příslušných mocnin x obdržíme: $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$. Partikulární řešení má tedy tvar:

$$v = -\frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Obecné řešení výchozí rovnice je součtem obecného řešení příslušné homogenní rovnice a partikulárních řešení u a v:

$$y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{x} + \frac{x}{9}\left(x^2 + 4x + \frac{26}{3}\right) - \frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Příklad 14. Najděme obecné řešení nehomogenní rovnice $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x$.

Řešení: Nejdříve budeme řešit příslušnou homogenní rovnici $y'' - 8y' + 20y = 0$. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0.$$

Tato rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = 4 \pm 2i$. Fundamentálním systémem je tedy

$$y_1 = e^{4x}\cos 2x, \quad y_2 = e^{4x}\sin 2x.$$

Protože číslo $4+2i$ je jednonásobným kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat partikulární řešení ve tvaru:

$$y_p = x\left[(ax+b)e^{4x}\cos 2x + (cx+d)e^{4x}\sin 2x\right],$$

kde a, b, c, d jsou neznámé koeficienty.

Protože funkce y_p je součtem tří funkcí, jsou derivace y_p' a y_p'' poměrně složité výrazy. Ovšem po dosazení do rovnice se exponenciální ~~rovnice~~ funkce zkrátí. Provedeme substituci

$$y = e^{4x} v .$$

Dosazením do původní rovnice se rovnice transformuje na rovnici:

$$v'' + 4v = 5x \sin 2x . \qquad (*)$$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4 = 0$ má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Pak lze hledat partikulární řešení v_p rovnice $(*)$ ve tvaru:

$$v_p = x\left[(ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x\right],$$

kde a, b, c, d jsou neznámé koeficienty. Dosazením ~~ze~~ v_p'' a v_p do rovnice $(*)$ dostáváme pro výrazy u goniometrických funkcí $\cos 2x$ a $\sin 2x$ dvě rovnice:

$$2a + 8cx + 4d = 0$$
$$-8ax - 4b + 2c = 5x$$

Odtud dostaneme porovnáním koeficientů u příslušných mocnin x:

$$a = -\frac{5}{8},\ b = 0,\ c = 0,\ d = \frac{5}{16} .$$

Tedy $$v_p = -\frac{5}{8}x^2\cos 2x + \frac{5}{16}x \sin 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_p = e^{4x}\left(-\frac{5}{8}x^2\cos 2x + \frac{5}{16}x\sin 2x\right).$$

Obecné řešení je tedy:

$$y = C_1 \cdot e^{4x}\cos 2x + C_2 \cdot e^{4x}\sin 2x + y_p =$$
$$= e^{4x}\left[\left(C_1 - \frac{5}{8}x^2\right)\cos 2x + \left(C_2 + \frac{5}{16}x\right)\sin 2x\right].$$