

3. Směrová a parc. derivace

úterý 20. října 2020

20:34

Příklad 1. Uvažujme fci
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } x \cdot y = 0 \\ 1, & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Vyšetřujeme existenci parciálních derivací
 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Dále vyšetřujeme spojitost funkce v
 bodě $(0,0)$.

$$\underline{R^V}: \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

$$\text{Tedy } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Počítáme číselné limity:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0.$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

$\Rightarrow$ fce $f(x,y)$ není v bodě $(0,0)$

spojitá.

Příklad 2. Uvažujme fci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

daná předpisem:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{jestliže } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jestliže } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vypočítáme parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$,
 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Je fce $f(x,y)$ spojitá
 v bodě $a = (0,0)$?

R : Je-li $x \cdot y = 0$, pak $f(x,y) = 0$.

Další plyne:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

$$\left| \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} \right| = |xy| \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \leq |xy| \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} =$$

$$= |xy| \rightarrow 0 \text{ pro } (x,y) \rightarrow (0,0).$$

Tedy $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ a tudíž

je funkce f v bodě $a = (0,0)$ spojitá.

Příklad 3. Mějme danou fci $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

předpisem:

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_k$ pro jisté k ,
 $1 \leq k \leq n$. Najděte směrovou derivaci $D_v f(x)$
 pro libovolný směrový vektor $v \in \mathbb{R}^n$.

$\underline{R}$: Sestavíme tr. průřezovou fci

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : g_v(t) = f(x + t \cdot v) =$$

$$= f((x_1, x_2, \dots, x_n) + t \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n)) =$$

$$= f((x_1 + t v_1, x_2 + t v_2, \dots, x_n + t v_n)) =$$

$$= x_k + t v_k \Rightarrow g'_v(0) = v_k.$$

$$\text{Tedy } \boxed{D_v f(x) = v_k}$$

Příklad 4. Uvažujme lib. lineární funkci

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (to znamená, že $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$).

Najděte $D_v f(x)$ pro lib. $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$.

$\underline{R^V}$: Necht $x, v \in \mathbb{R}^n$, pak

$$g_v(t) = f(x + t v) = f(x) + t f(v)$$

$$\Rightarrow D_v f(x) = g'_v(0) = (f(x) + t f(v))' \Big|_{t=0} =$$

$$= f(v).$$

Příklad 5. Mějme fci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danou

předpisem $f(x,y) = x \cdot y$. Určete $D_v f(a)$,

kde $a = (a_1, a_2)$ a $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (1,2)$.

$\underline{R^V}$:

a) Podle definice:

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t v) - f(a)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((a_1, a_2) + t(1,0)) - f(a_1, a_2)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a_1 + t) a_2 - a_1 a_2}{t} = \underline{a_2}.$$

Pomocí průřezové funkce:

$$g_{v_1}(t) = f(a + t v_1) = f((a_1, a_2) + t(1,0)) =$$

$$= f(a_1 + t, a_2) = (a_1 + t) a_2 = a_1 a_2 + t a_2.$$

$$\text{Pak } D_{v_1} f(a_1, a_2) = g'_{v_1}(0) = (a_1 a_2 + t a_2)' \Big|_{t=0} =$$

$$= \underline{a_2}.$$

b) Podle definice:

$$D_{v_2} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((a_1, a_2) + t(1,2)) - f(a_1, a_2)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2 + 2t) - f(a_1, a_2)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a_1 + t)(a_2 + 2t) - a_1 a_2}{t} = \underline{a_2 + 2a_1}.$$

Pomocí průřezové funkce:

$$g_v(t) \Big|_{v=(1,2)} = f((a_1, a_2) + t(1,2)) = f(a_1 + t, a_2 + 2t) =$$

$$= (a_1 + t)(a_2 + 2t) = a_1 a_2 + 2a_1 t + a_2 t + 2t^2$$

$$\Rightarrow D_v f(a_1, a_2) \Big|_{v=(1,2)} = g'_v(0) \Big|_{v=(1,2)} =$$

$$= (a_1 a_2 + 2a_1 t + a_2 t + 2t^2)' \Big|_{t=0} = 2a_1 + a_2 + 4t \Big|_{t=0} =$$

$$= \underline{a_2 + 2a_1}.$$

SAMOSTATNÁ CVIČENÍ

U následujících funkcí zjistěte

a) pro které vektory $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$
 existuje směrová derivace $D_v f(0,0)$ a
 pokud existuje, pak vypočítejte její
 hodnotu.

b) Zjistěte, je-li fce f spojitá
 funkcí v počátku $a = (0,0)$.

$$(i) \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$(ii) \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$(iii) \quad f(x,y) = |x| + |y|.$$

$$(iv) \quad f(x,y) = \sqrt{|x y|}.$$

$$(v) \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$