

4. Poznámky a doplňky

čtvrtek 22. října 2020 19:33

Příklad (reprezentace totálního diferenciálu skalární funkce).

Nejdříve uvažujeme zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i,$$

$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$, kde i je pevně zvoleno. Pak je f lineárním zobrazením:

je-li $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$, potom

$$\begin{aligned} f(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) &= f(\alpha(x_1, \dots, x_n) + \beta(y_1, \dots, y_n)) = \\ &= f(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots, \alpha x_n + \beta y_n) = \\ &= \alpha x_i + \beta y_i = \alpha f(x_1, \dots, x_n) + \beta f(y_1, \dots, y_n) \\ &= \alpha f(\underline{x}) + \beta f(\underline{y}) \Rightarrow f \text{ je lineární zobr.} \end{aligned}$$

Označení. Je-li X vektorový prostor, pak $X^\#$ bude označovat množinu všech lin. zobrazení $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Zobrazení z předchozího příkladu budeme označovat symbolem dx_i ($1 \leq i \leq n$).

Tedy $dx_i \in (\mathbb{R}^n)^\#$.

Cvičení 1. Ukažte, že lze na množině $(\mathbb{R}^n)^\#$ lze zavést operace „+“ (sčítání) a „ $\cdot$ “ (násobení skalárem) tak, že

$(\mathbb{R}^n)^\#, +, \cdot$ tvoří vektorový prostor.

Návod: definujeme: $\forall f, g \in (\mathbb{R}^n)^\#$:

$$(f+g)(\underline{x}) := f(\underline{x}) + g(\underline{x}), \underline{x} \in \mathbb{R}^n;$$

$\forall f \in (\mathbb{R}^n)^\#, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha f)(\underline{x}) := \alpha \cdot f(\underline{x}), \underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

$\uparrow$ NÁSOBENÍ SKALÁREM $\uparrow$ NÁSOBENÍ REÁLNÝCH ČÍSEL

Cvičení 2. Ukažte, že $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ tvoří bázis vektorového prostoru $(\mathbb{R}^n)^\#$.

Tedy $\forall f \in (\mathbb{R}^n)^\#$ a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tak, že

$$\text{že } f = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i = \alpha_1 dx_1 + \dots + \alpha_n dx_n.$$

Návod. Ukažte, že lze položit $\alpha_i = f(e_i)$,

kde $e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$.

Cvičení 3. Předpokládejme, že fce

$\eta = f(x_1, \dots, x_n)$ je diferencovatelnou funkcí v bodě $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ukažte, že totální diferenciál $df_{\underline{a}}$ lze vyjádřit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} df_{\underline{a}} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) \cdot dx_i = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{a}) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a}) dx_n. \end{aligned}$$

Speciálně, pokud je fce f fu-

Děla. Necht' $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelnou funkcí v bodě $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$. Pak

pro každý vektor $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ existuje směr. derivace $D_{\underline{v}} f(\underline{a})$ a platí:

$$\begin{aligned} D_{\underline{v}} f(\underline{a}) &= df_{\underline{a}}(\underline{v}) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) dx_i \right) (\underline{v}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) dx_i(\underline{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) v_i = \\ &= \underbrace{\left\langle \nabla f(\underline{a}), \underline{v} \right\rangle}_{\substack{\text{skalární součin} \\ \text{gradientu } \nabla f(\underline{a}) \text{ a} \\ \text{směr. vektoru } \underline{v}}} \end{aligned}$$

Důkaz. Nejdříve ukažme, že z

diferencovatelnosti zobrazení F v bodě $\underline{a}$ plyne existence směr. derivace.

Z diferencovatelnosti v bodě $\underline{a}$ plyne:

$$0 = \lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \frac{f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) - df_{\underline{a}}(\underline{h})}{\|\underline{h}\|}. \quad (*)$$

Na vztahu (*) užitíme substituci:

$$\underline{h} = t \cdot \underline{v}, \quad \underline{v} \neq \underline{0}$$

a předpokládejme, že $t \rightarrow 0_+$ Pak $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$.

Tudíž

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{f(\underline{a} + t\underline{v}) - f(\underline{a}) - df_{\underline{a}}(t\underline{v})}{\|t\underline{v}\|} = \\ &= + \frac{1}{\|\underline{v}\|} \lim_{t \rightarrow 0_+} \left[\frac{f(\underline{a} + t\underline{v}) - f(\underline{a})}{t} - df_{\underline{a}}(\underline{v}) \right] \Rightarrow \\ \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(\underline{a} + t\underline{v}) - f(\underline{a})}{t} - df_{\underline{a}}(\underline{v}) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Je-li $\underline{v} = \underline{0}$, pak je zřejmé, že

$$\frac{f(\underline{a} + t \cdot \underline{0}) - f(\underline{a})}{t} = \frac{f(\underline{a} + t \cdot \underline{0}) - f(\underline{a})}{t} = 0$$

$\forall t \neq 0 \Rightarrow D_{\underline{v}} f(\underline{a}) = 0 = df_{\underline{a}}(\underline{v})$, kde

$\underline{v} = \underline{0}$.

Tdud plyne:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{a} + t\underline{v}) - f(\underline{a})}{t} &= \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(\underline{a} + t\underline{v}) - f(\underline{a})}{t} - df_{\underline{a}}(\underline{v}) + df_{\underline{a}}(\underline{v}) \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(\underline{a} + t\underline{v}) - f(\underline{a})}{t} - df_{\underline{a}}(\underline{v}) \right] + \lim_{t \rightarrow 0} df_{\underline{a}}(\underline{v}) \\ &= df_{\underline{a}}(\underline{v}). \end{aligned}$$

Z předchozího cv. víme, že

$$df_{\underline{a}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) \cdot dx_i. \quad \text{Tudíž máme:}$$

$$\begin{aligned} D_{\underline{v}} f(\underline{a}) &= df_{\underline{a}}(\underline{v}) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) \cdot dx_i \right) (\underline{v}) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) dx_i(\underline{v}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) v_i = \left\langle \nabla f(\underline{a}), \underline{v} \right\rangle. \end{aligned}$$