

L3_binom_rozdeleni

středa 28. října 2020 16:35

Připomeňme, že pokud opakuje n -krát náhodný pokus za identických podmínek a p -li pravděpodobnost, že při realizaci nastane jev A rovná číslu $p \in \langle 0,1 \rangle$ a jestliže A_k označuje jev, když jev A nastal celkem k -krát (kde $k \in \{0,1,\dots,n\}$), pak lze pravděpodobnost jevu A_k vyjádřit vzorcem:

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (*)$$

Příklad 1. Dva rovnocenní tenisté hrají proti sobě. Je pravděpodobnější vyhrát dva zápasy ze čtyř nebo tři ze šesti?

Rěšení: Nejdříve najdeme Bernoulliho schéma pro 4 opakování náhodných pokusů, přičemž A bude označovat jev, při němž vyhráje hráč č. 1.

Pravděpodobnost p , že při zápase vyhráje hráč č. 1 je rovna $1/2$, tj. $p = 1/2$ a $q = 1-p = 1/2$. A_2 bude označovat jev, při němž hráč č. 1 vyhrál dva z čtyř zápasů. Pak máme:

$$P(A_2) = \binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6/16.$$

Opakuje-li se hra 6 krát a A_3 značí jev, při němž hráč č. 1 vyhráje celkem tři z šesti zápasů, pak

$$P(A_3) = \binom{6}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}.$$

Odtud tedy vyplývá, že je pravděpodobnější vyhrát dva zápasy ze čtyř než tři ze šesti.

(Pomameňme, že jednotlivé zápasy považujeme z hlediska pravděpodobnosti za nezávislé náhodné pokusy!)

Příklad 2. Předpokládejme, že realizujeme čtyři nezávislé náhodné pokusy a předpokládejme, že jev A nastane při n -tém pokusu s pravděpodobností $p = 0,4$. Spočítáme pravděpodobnost, že jev A nastal alespoň třikrát.

Rěšení: A_3 resp. A_4 označují jevy, když jev A nastal právě třikrát resp. právě čtyřikrát. Jevy A_3 a A_4 se navzájem tedy vylučují. Výsledná pravděpodobnost je tedy rovna:

$$P(A_3 \cup A_4) = P(A_3) + P(A_4) = \binom{4}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6 + \binom{4}{4} \cdot 0,4^4 = 0,1792.$$

V následujícím příkladu použijeme následující odhad modus $\hat{x}$ v případě Bernoulliho rozdělení pravděpodobnosti $\text{Bin}(p, n)$, kde n je počet nezávislých pokusů a $p \in \langle 0,1 \rangle$ je pravděpodobnost "úspěchu". Jestliže $k \in \{0,1,\dots,n\}$ je takové, že $P(A_k)$ má maximální hodnotu, pak hodnotu $\hat{x} = k$ nazýváme **modus**.

Pro modus $\hat{x}$ máme odhady:

$$n \cdot p - q \leq \hat{x} \leq n \cdot p + p,$$

kde $q = 1-p$.

Jestli $n \cdot p + p$ celé, pak existují dvě hodnoty modu $\hat{x}$:

$$\hat{x}_1 = n \cdot p - q, \hat{x}_2 = n \cdot p + p = \hat{x}_1 + 1.$$

Příklad 3. Výstupní kontrola prověřuje 24 výrobků. Pravděpodobnost toho, že je výrobek kvalitní je rovna 0,6. Najdeme nejpravděpodobnější počet kvalitních výrobků.

Rěšení: Jedná se opět o model s binomickým rozdělením pravděpodobnosti:

$$\text{Bin}(0,6, 24), \text{ tj. } n=24, p=0,6, q=0,4.$$

Pro modus $\hat{x}$ máme:

$$24 \cdot 0,6 - 0,4 \leq \hat{x} \leq 24 \cdot 0,6 + 0,6$$

$$14 \leq \hat{x} \leq 15.$$

Pak je tedy nejpravděpodobnější, že bude maláns $k=14$ nebo $k=15$.

Kvalitních výrobků:

$$P(A_{14}) = P(A_{15}) = 0,16116.$$

Příklad 4. Dva střelci střelají na cíl. Pravděpodobnost, že první resp. druhý střelec při jednom výstřelu mine cíl, je $p_1 = 0,2$, resp. $p_2 = 0,4$. Najdeme nejpravděpodobnější počet společných výstřelů obou střelců, při nichž ani jeden nexasáhl cíl, jestliže bylo společně vystřeleno celkem 25 krát.

[Rěšení: Nejpravděpodobnější je, že oba střelci xároveň minou cíl při dvou společných výstřelech.]