

Diskretní / jednoduchá m.v.

Připomeneme, že první situace vhodná pro zavedení pr. zavedení je případ kdy je základní prostor S konečnou množinou. Potom je každá reálná funkce $S \ni e \mapsto X(e) \in \mathbb{R}$ náhodnou veličinou nebo proměnnou.

Vyjdeme-li z daného pravděpodobnostního prostoru $(S, \mathcal{F}, P)$, pak lze vyjádřit pravděpodobnostní jevy: $\{X = x_1\}, \dots, \{X = x_m\}$, kde $T = \{x_1, \dots, x_m\} =$ sba hodnot f-ze $X = \{X(e) : e \in S\}$.

Funkce $p : T \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definovaná předpisem:

$$p_i = p(x_i) = P(\{X = x_i\}), \quad i = 1, \dots, m$$

budeme nazývat **pravděpodobnostní funkci m.v. X** a množinu čísel $\{p_1, \dots, p_m\}$ pak nazýváme **pravděpodobnostní rozložením m.v. X** .

Tyto informace lze přehledně zobrazit pomocí tabulky:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_m
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_m

Cvičení 1. Uvažujme náhodný pokus, při němž házíme dvěma vyváženými mincemi. Sestavte pravděpodobnostní model $(S, \mathcal{F}, P)$. Kolik prvků bude mít základní prostor S ? Dejme tomu, že číslo X bude označovat, kolikrát padla panna, P . Chápejme X jako náhodnou veličinu a poté sestavte tabulku definující pravděpodobnostní rozložení m.v. X .

Cvičení 2. Proveďte analogický kolež v případě náhodného pokusu, kdy z populace lidí tele je sčítán počet žen a mužů náhodně vybrané dva jedince a budeme mít zajímat, kolik žen je v této vybrané dvojici.

Známe-li pravděpodobnostní rozložení diskretní m.v. $X : \{p_i = p(x_i), \dots, p_m = p(x_m)\}$, pak lze například pro interval $B = (a, b) \subset \mathbb{R}$ určit pravděpodobnost jevu $\{X \in B\}$ jako:

$$\left\{ \begin{aligned} P(\{X \in B\}) &= P(\{e \in S : X(e) \in (a, b)\}) = \\ &= \sum_{a < x_i < b} p_i = \sum_{a < x_i < b} p(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Cvičení 3. Dokažte vzorec $(*)$!

Cvičení 4. Uvažujme náhodný pokus, kdy dva hráči na sobě nezávisle opatřujeme hod mincí přičemž pravděpodobnost že padne panna je $p = 0,6$. Necht X je počet kolikrát padla panna. Pak jím $\{X=0\}$ znamená, že panna nepadla ani jednou, $\{X=1\}$ znamená, že panna padla právě jednou a $\{X=2\}$ znamená, že panna padla v obou kólech. Napište graf distribuční funkce F_X a pravděpodobnostní funkce p_X . Fce F_X je definována jako f-ze $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ předpisem:

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i) \quad a$$

$\forall x \in \mathbb{R} : p_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(\{X = x\})$. (p_X je pravděpodobnostní fce m.v. X !)

Cvičení 5. Ukaže, že fce F_X je nelesající funkce a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad a \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1.$$

Cvičení 6. $\forall x \in \mathbb{R}$ položme $F_X(x-) = \lim_{t \rightarrow x-} F_X(t)$, $F_X(x+) = \lim_{t \rightarrow x+} F_X(t)$.

Dokaže, že:

- a) $\forall x \in \mathbb{R}$ p distribuční fce F_X spojitá zprava v bodě x , tj.
 $F_X(x) = F_X(x+)$.

b) $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$p_X(x) = F_X(x) - F_X(x-).$$

Komentář: Z předchozích cvičení vyplývá, že známe-li pravděpodobnostní rozložení m.v. X , tj. známe-li pravděpodobnosti $p_i = P(\{X = x_i\})$ pro každou hodnotu, kterou může nabývat m.v. X , pak lze určit pravděpodobnostní funkci $p_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a distribuční funkci $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Platí totiž:

$$\forall x \in \mathbb{R} : p_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } X \text{ nenabývá hodnoty } x \\ p_i, & \text{pokud } x = x_i, \text{ kde } x_i \text{ ltr} \\ & \text{v sbra hodnot m.v. } X. \end{cases}$$

Dále pak $\forall x \in \mathbb{R} : F_X(x) = \sum_{\{i : x_i \leq x\}} p_X(x_i)$ a kde $\{x_i\}_{i=1}^m$ ltr sbra hodnot m.v. X .

Cvičení 7. Předpokládejme, že známe distribuční funkci F_X náhodné veličiny X , která je určena předpisem:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 0,2, & x \in (-1; 1) \\ 0,45, & x \in (1; 1,5) \\ 0,75, & x \in (1,5; 4) \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

Určte pak pravděpodobnostní rozložení m.v. X (tabulkou: $\begin{array}{c|ccc} x_i & \dots & \\ \hline p_i & \dots & \end{array}$)

a napište graf tzv. pravděpodobnostní fce p_X .